Matemática Financeira

Prof. Msc. Osorio Moreira Couto Junior

1 - JUROS E CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

1.1 - JUROS

JURO é a remuneração do capital emprestado, podendo ser entendido, de forma simplificada, como sendo o aluguel pago pelo uso do dinheiro.

Quem possui recursos pode utilizá-los na compra de bens de consumo, ou de serviços, na aquisição de bens de produção, compra de imóveis para uso próprio ou venda futura, emprestar a terceiros, aplicar em títulos de renda fixa ou variável, deixar depositado para atender a eventualidades ou na expectativa de uma oportunidade melhor para sua utilização ou pela simples satisfação de ter dinheiro.

Ao se dispor emprestar, o possuidor do recurso, para avaliar as taxas de remuneração para os seus recursos, deve atentar para os seguintes fatores:

Risco: probabilidade de o tomador do empréstimo não resgatar o dinheiro.

Despesas: todas as despesas operacionais, contratuais e tributárias para a formalização do empréstimo e à efetivação da cobrança.

Inflação: índice de desvalorização do poder aquisitivo da moeda previsto para o prazo do empréstimo, se houver.

Ganho (ou lucro): fixado em função das demais oportunidades de investimentos (“custo de oportunidade”); justifica-se pela privação, por parte do seu dono, da utilidade do capital.

1.2 - CAPITAL

Capital é qualquer valor expresso em moeda e disponível em determinada época.

1.3 - TAXA DE JUROS

Taxa de juros é a razão entre os juros recebidos (ou pagos) no fim de um período de tempo e o capital inicialmente empregado. A taxa está sempre relacionada com uma unidade de tempo (dia, mês, trimestre, semestre, ano etc.)

Exemplo:

Qual a taxa de juros cobrada num empréstimo de R$ 100,00, a ser resgatado por R$ 140,00 no final de um ano?

Capital final........................R$ 140,00
Capital inicial ....R$ 100,00
Juros..................................**R$ 40,00**

Taxa de juros....................R$ 40,00 / 100,00 = 0,40 ou 40% a a
A taxa de juros é representada em percentual e em base unitária.
Percentual = 2,00%
Unitária = 0,02 (**2/100**)

1.4 - CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Capitalização simples é aquela em que a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial, não incide, pois, sobre os juros acumulados. A taxa varia linearmente em função do tempo. Se quisermos converter a taxa diária em mensal, basta multiplicar a taxa diária por 30; se desejarmos uma taxa anual e tendo a mensal, basta multiplicar por 12, e assim por diante.

CALCULO DOS JUROS:

Valor dos juros é obtido da expressão: **J = C x i x n**
onde:
j = valor dos juros
C = valor do capital inicial ou principal
i = taxa
n = prazo
M = montante final

EXEMPLO DE APLICAÇÃO:

1. Qual o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R$ 10.000,00, pelo prazo de 15 meses, sabendo-se que a taxa cobrada é de 3% a m. ?
   dados:
   C = 10.000,00
   n = 15 meses
   i = 3% a m.
   j = ?
   solução:
   j = **C** x **i** x **n**
   j = 10.000,00 x 0,03 **(3/100)** x 15 = 4.500,00

2. Um capital de R$ 25.000,00, aplicado durante 10 meses, rende juros de R$ 5.000,00. Determinar a taxa correspondente?
   C = 25.000,00
   j = 5.000,00
   n = 10 meses
   i = ?
   solução:
   j = **C** x **i** x **n**
   i = **J** / **C** x **n** = 5.000,00/25.000,0 x10 = 0,02 ou 2% a. m.

3. Uma aplicação de R$ 50.000,00 pelo prazo de 180 dias obteve um rendimento de R$ 8.250,00. Indaga-se: Qual a taxa anual correspondente a essa aplicação?
   C = 50.000,00
   j = 8.250,00
   n = 180 dias
   i = ?
   solução: **i** = **j** / **C** x **n**
   i = 8.250,00 / 50.000,00 x 180 = 0,00091667, ou 0,091667% ao dia.

   Taxa anual = 360 x 0,00091667 = 0,33 ou 33% a a

Observação: Quando o prazo informado for em dias, a taxa resultante dos cálculos será diária; se o prazo for em meses, a taxa será mensal; se for em trimestre, a taxa será trimestral, e assim sucessivamente.

4. Sabendo-se que os juros de R$ 12.000,00 foram obtidos, com as aplicações de R$ 15.000,00, à taxa de juros de 8% ao trimestre, pede-se que calcule o prazo?

C = 15.000,00
j = 12.000,00
i = 8% ao trimestre
n = ?
j = C x i x n $\Rightarrow$ **n = j / C x i**

n = 12.000,00 / 15.000,00 x 0,08 = 12.000,00 / 1.200,00 = 10 **t**
ou 2,50 anos.

5. Qual o capital que, à taxa de 2,5% ao mês, rende juros de R$ 18.000,00 em 3 anos?

j = 18.000,00
n = 3 anos ou 36 meses
i = 2,5% a m.
C = ?
j = C x i x n = $\Rightarrow$ **C = j / i x n**
C = 18.000,00/ 0,025 x 36 = 18.000,00 / 0,90 = 20.000,00.

Outros exemplos:

1. Sabendo-se que certo capital, aplicado durante 10 semestres, à taxa de 36% ao ano rende R$ 72.000,00 de juros, determinar o montante?
Dados:
j = 72.000,00
n = 10 semestres
I = 36% a a = 18% ao semestre
M = ?
problema não pode ser solucionado a partir da fórmula **M = C(1 + i.n)** porque não conhecemos o valor do capital **C**.
Solução:

$$C = \frac{j}{i \times n}$$

$$C = \frac{72.000,00}{0,18 \times 10} = \frac{72.000,00}{1,8} = 40.000,00$$

como:
M = C + j
M = 40.000,00 + 72.000,00
M = 112.000,00

2. Fernando obtém R$ 40.000,00 emprestados de um agiota, entregando-lhe uma nota promissória de R$ 80.000,00, com vencimento para 12 meses. Determinar as taxas mensal e anual de juros cobrados pelo agiota?

Dados:
M = 80.000,00
C = 40.000,00
n = 12 meses
i = ?
Solução:
M = **C**(1 + **i.n**)
80.000,00 = 40.000,00 (1 + i x 12)

$$\frac{80.000,00}{40.000,00} = (1 + i \times 12)$$

2 = (1 + **i** x 12)
2 – 1 = (**i** x 12)
i = 1 / 12 i = 0,0833, ou 8,33% ao mês
Taxa anual = 8,33 x 12 = 100%

Nota: normalmente existe mais de um caminho para solucionar problemas de matemática financeira; no caso deste exemplo, a solução também poderia ser obtida através da equação **i = j / C . n**, visto que o valor dos juros é facilmente determinado a partir da expressão **j = M - C**.

3. Em que prazo uma aplicação de R$ 35.000,00 pode gerar um montante de R$ 53.375,00, considerando-se uma taxa de 30% ao ano?

Dados:
M = 53.375,00
C = 35.000,00
i = 30% ao ano
n = ?
Solução:
j = **M** - **C**
j = 53.375,00 - 35.000,00 = 18.375,00
n = **j** / **C** x **i** = 18.375,00/35.000,00 x 0,30 **n** =1,75 anos ou 21 meses.

1.5 - MÉTODO HAMBURGUÊS

Chamado método hamburguês é muito empregado pelos bancos, principalmente para o cálculo dos juros incidentes sobre os saldos devedores da "Contas Garantidas" ou "Cheque especial". Esse método apenas introduz uma simplificação óbvia nos cálculos, envolvendo problemas de capitalização simples, em que a diversos capitais, aplicados por diversos prazos, rendendo juros a uma taxa única.

Para elucidar, vamos apresentar o seguinte exemplo:

Calcular o valor dos juros referentes às aplicações dos capitais R$ 20.000,00, R$ 10.000,00 e R$ 40.000,00, pelos prazos de 65 dias, 72 dias e 20 dias, respectivamente, sabendo-se que a taxa considerada é de 25,2% ao ano.

Dados:

$\mathbf{C_1}$ = 20.000,00	$\mathbf{C_2}$ = 10.000,00	$\mathbf{C_3}$ = 40.000,00
$\mathbf{n_1}$ = 65 dias	$\mathbf{n_2}$ = 72 dias	$\mathbf{n_3}$ = 20 dias
i = 25,2% a a	**i** = 25,2% a a	**i** = 25,2% a a
$\mathbf{j_1}$ = ?	$\mathbf{j_2}$ = ?	$\mathbf{j_3}$ = ?

como se trata de capitalização simples, a taxa diária é obtida facilmente.
Taxa diária = 0,252 / 360 = 0,0007 ou 0,07% ao dia
solução:
$\mathbf{j = C \times i \times n}$

$\mathbf{j_t}$ = 20.000, x 65 x 0,0007+10.000, x 72 x 0,0007 + 40.000, x 20 x 0,0007
$\mathbf{j_t}$ = 0,0007 (20.000,00 x 65 + 10.000,00 x 72 + 40.000,00 x 20)
$\mathbf{j_t}$ = 0,0007 x 2.820.000,00 = 1.974,00

Dois exemplos clássicos de aplicação do método hamburguês:

1. Vamos admitir que o Banco Rico S/A esteja creditando juros, no final de cada semestre, sobre os saldos dos depósitos a vista, à razão de 12% ao ano. Calcular o total de juros a ser creditado no 1° semestre para um cliente que teve a seguinte movimentação em sua conta:

data	histórico	D/C	saldo	n° dias	n° dias x saldo
-		-	-	15	-
15/01/xx	Depósito	100.000,00 C	100.000,00	11	1.100.000,00
26/01/xx	cheque	30.000,00 D	70.000,00	18	1.260.000,00
13/02/xx	cheque	15.000,00 D	55.000,00	15	825.000,00
28/02/xx	o pagto	40.000,00 C	95.000,00	5	475.000,00
05/03/xx	a débito	60.000,00 D	35.000,00	46	1.610.000,00
20/04/xx	cheque	28.000,00 D	7.000,00	12	84.000,00
02/05/xx	depósito	22.000,00 C	29.000,00	3	87.000,00
05/05/xx	cheque	29.000,00 D	-	41	-
15/06/xx	depósito	10.000,00 C	10.000,00	15	150.000,00
			TOTAL	181	5.591.000,00

$j_t = i_d \times \sum (C_t \times n_t)$
$j_t = 0{,}12/360 \times 5.591.000{,}00$
$j_t = 1.863{,}67$

$\sum$ = somatório de capital x período.

Observação: Na coluna nº de dias representamos o nº de dias em que o saldo respectivo permaneceu inalterado; como a conta foi aberta no dia 15/01/xx, acrescentamos 15 dias para efeito de simples conferência , visto que o primeiro semestre, quando não bissexto, tem 181 dias. Conta-se dias corridos.

2. Este exemplo envolve aplicação em contas garantidas, mais especificamente, com os chamados cheques especiais. As principais características desse tipo de operação são as seguintes:

a) o cliente pode sacar a descoberto até certo limite fixado em contrato:
b) os juros incidentes sobre os saldos devedores são debitados mensal, trimestral ou semestralmente na conta do cliente.

Aqui vamos demonstrar como os juros são calculados mensalmente, e debitados no final do próprio mês ou no inicio do mês seguinte.

Calcular os juros incidentes sobre os saldos devedores de um cliente, durante o mês de abril de xx, à razão de 4% ao mês, conforme extrato a seguir:

data	histórico	D/C	saldo	nº dias	nº dias x saldo
01/04/xx	transporte		20.000,00 C	-	
05/04/xx	cheque	25.000,00 D	5.000,00 D	7	35.000,00
12/04/xx	cheque	10.000,00 D	15.000,00 D	1	15.000,00
13/04/xx	depósito	19.000,00 C	4.000,00 C	-	-
18/04/xx	a débito	5.500,00 D	1.500,00 D	3	4.500,00
21/04/xx	cheque	8.500,00 D	10.000,00 D	5	50.000,00
26/04/xx	depósito	3.000,00 C	7.000,00 D	4	28.000,00
			TOTAL	20	132.500,00

Na coluna nº de dias representamos o nº de dias em que o saldo ficou inalterado.
$j_t = i_d \times \sum(C_t \times n_t)$
$j_t = 0{,}04/30 \times 132.500{,}00$
$j_t = 176{,}67$

Problemas Propostos - Juros Simples

1) Determinar quanto renderá um capital de R$ 60.000,00 aplicado à taxa de 22% ao ano, durante 7 meses.
R = 7.700,00
2) Um capital de R$ 150.000,00 aplicado durante 14 meses, rendeu juros de R$ 7.752,50 Determinar a taxa anual.
R = 4,43%
3) Durante 855 dias certo capital gerou um montante de R$ 64.200,00. Sabendo-se que a taxa de juros é de 1,5% ao mês, determinar o valor do capital aplicado.
R = 44.973,73
4) Qual o valor dos juros contidos no montante de R$ 100.000,00 resultante da aplicação de certo capital a taxa de 42% ao ano, durante 13 meses.
R = 31.271,48
5) Qual o valor a ser pago, no final de 5 meses e 18 dias, correspondente a um empréstimo de R$ 125.000,00 sabendo-se que a taxa de juros é de 27% ao semestre.
R = 156.500,00
6) Em quanto tempo um capital de R$ 900.000,00 aplicado a taxa de 0,03% ao dia, gera um montante de R$ 994.500,00.
R = 350 dias
7) Um capital de R$ 50.000,00 foi aplicado no dia 19/06/1997 e resgatado em 20/01/1998. Sabendo-se que a taxa de juros da aplicação foi de 56% ao ano, calcular o valor dos juros, considerando-se o número de dias efetivo entre as duas datas.
R = 16.722,22
8) Uma empresa aplicou R$ 2.000.000,00 no Open Market no dia 15/07/1997 e resgatou essa aplicação no dia 21/07/1997 por R$ 2.018.000,00. Qual foi a taxa mensal de rendimento proporcionada por essa operação.
R = 4,5% ao mês
9) Calcular o valor do capital que aplicado a taxa de 50,4% ao ano, durante 2 anos e 3 meses, produz um montante de R$ 600.000,00.
R = 281.162,14
10) Ao fim de quanto tempo o capital de R$ 40.000,00 aplicado a taxa de 3% ao mês, produz R$ 18.600,00 de juros.
R = 15,5 meses ou 465 dias
11) Obteve-se um empréstimo de R$ 100.000,00 para ser liquidado por R$ 186.625,00 no final de 26 meses e meio. Qual a taxa de juros anual cobrada nessa operação.
R = 46,2% ao ano
12) Em quanto tempo um capital aplicado a 48% ao ano dobra o seu valor.
R = 25 meses
13) A que taxa de juros um capital aplicado durante 10 meses rende juros igual a ¼ do seu valor.
R = 2,5% ao mês
14) Um capital emprestado gerou R$ 96.720,00 de juros. Sabendo-se que o prazo de aplicação foi de 13 meses e a taxa de juros de 2% ao mês, calcular o valor do montante.

R = 468.720,00

15) Em quantos dias um capital de R$ 270.420,00 produzirá juros de R$ 62.196,60 a uma taxa de 3% ao mês.
R = 230 dias

16) Determinar o capital necessário para produzir um montante de R$ 798.000,00 no final de um ano e meio, aplicado a taxa de 15% ao trimestre.
R = 420.000,00

17) A aplicação de R$ 356.000,00 gerou um montante de R$ 661.270,00 no final de 20 meses. Calcular a taxa anual.
R = 51,45%

18) Certo capital aplicado gerou um montante de R$ 1.000.000,00 sabendo-se que a taxa de juros é de 5% ao mês e o prazo de 9 meses, calcular o valo dos juros.
R = 310.344,83

19) Determinar o montante correspondente a uma aplicação de R$ 450.000,00 por 225 dias, à taxa de 2,6% ao mês.
R = 537.750,00

20) Calcular o valor do capital, que aplicado a uma taxa de 1,2% ao mês, por 174 dias, produziu um montante de R$ 543.840,00.
R = 508.451,76

21) Um título de renda prefixada foi adquirido por R$ 980.000,00 e resgatado por R$ 1.147.776,00 no final de 8 meses. Calcular a taxa mensal de juros.
R = 2,14

22) Em que prazo uma aplicação de R$ 500.000,00 possibilita o resgate de R$ 610.000,00 a taxa de 2,2% ao mês.
R = 10 meses

23) A que taxa anual devo aplicar um capital de R$ 275.000,00 para obter juros de R$ 77.293,33 no final de 186 dias.
R = 54,40%

2 - JUROS COMPOSTOS

2.1 - CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA.

Quando uma determinada soma de dinheiro está aplicada a juros simples, os juros são sempre calculados sempre sobre o montante inicial. Quando uma soma está aplicada a juros compostos, os juros são calculados não apenas sobre o capital inicial, mas sobre este capital acrescido dos juros já vencidos**.**

Capitalização composta é aquela em que a taxa de juros incide sobre o principal acrescido dos juros acumulados até o período anterior. Neste regime de capitalização a taxa varia exponencialmente em função do tempo.

O conceito de montante é o mesmo definido para capitalização simples, ou seja, é a soma do capital aplicado ou devido mais o valor dos juros correspondentes ao prazo da aplicação ou da divida.

A simbologia é a mesma já conhecida, ou seja, **M**, o montante, **C**, o capital inicial, **n**, o período e **i**, a taxa.

A dedução da fórmula do montante para um único pagamento é pouco mais complexa que aquela já vista para a capitalização simples e para facilitar o entendimento, vamos admitir que defrontamos com o seguinte problema:

Calcular o montante de um capital de R$ 1.000,00, aplicado à taxa de 4% ao mês, durante 5 meses.

Dados: **C** = 1.000,00
n = 5 meses
i = 4% ao mês
M = ?

- Quadro a seguir permite que visualizemos claramente o cálculo do montante, mês a mês.

Mês *(t)*	**capital inicio mês (P_t)**	**juros cor. mês (J_t)**	**montante final mês (m_t)**
1	1.000,00	1.000,00 x 0,04 = 40,00	1.040,00
2	1.040,00	1.040,00 x 0,04 = 41,60	1.081,60
3	1.081,60	1.081,60 x 0,04 = 43,26	1.124,86
4	1.124,86	1.124,86 x 0,04 = 45,00	1.169,86
5	1.169,86	1.169,86 x 0,04 = 46,79	1.216,65

O valor do montante no final do quinto mês é de R$ 1.216,65. O montante final de cada mês é o valor do capital inicial do mês seguinte. Entretanto, essa forma de cálculo é bastante trabalhosa e demorada. Vamos deduzir uma fórmula que permita um cálculo mais fácil e rápido, partindo do desenvolvimento anterior, sem no entanto efetuar os cálculos ali demonstrados.

$\mathbf{M_0}$ = 1.000,00
$\mathbf{M_1}$ = 1.000,00 + 0,04 x 1.000,00 = 1.000,00(1 + 0,04) = 1.000,00 $(1.04)^1$
$\mathbf{M_2}$ = 1.000,00(1,04) + 0,04 x 1.000,00 x (1,04) = 1.000,00 (1,04)(1+0,04) = 1.000,00$(1,04)^2$
....
$\mathbf{M_5}$ = 1.000,00$(1,04)^4$ + 0,04 x 1.000,00$(1,04)^4$= 1.000,00$(1,04)^4$(1 + 0,04) = 1.000,00 $(1,04)^5$

O valor do montante no final do quinto mês é dado pela expressão:M_5 = 1.000,00 $(1,04)^5$. Como $(1,04)^5 = 1,21656 \Rightarrow$ m = 1.000,00 x 1,21656 = 1.216,65, que confere com o valor determinado anteriormente.

Substituindo cada **n** da expressão $\mathbf{M_5}$ = 1.000,00$(1,04)^5$ pelo seu símbolo correspondente, temos $\mathbf{M = C\ (1 + i)^n}$, em que a expressão $(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$ é chamada de fator de capitalização ou fator de acumulação de capital para pagamento simples ou único.

Na calculadora **HP12C** a simbologia é a seguinte:
PV = capital inicial
FV = montante
i = taxa
n = prazo/tempo/período

HP12C = 1.000,00 **CHS PV** 4 **i** 5 **n** **FV** = 1.216,65.

1) Qual o montante de uma aplicação de R$ 15.000,00, pelo prazo de 9 meses, à taxa de 2% ao mês.
   Dados: **C** = 15.000,00
   n = 9 meses
   i = 2% ao mês
   M = ?
   Solução:
   $\mathbf{M = C(1 + i)^n}$
   M = 15.000,00 $(1 + 0,02)^9$
   M = 15.000,00 x 1,19509 = 17.926,35

O valor atual (ou valor presente) de um pagamento simples, ou único, cuja conceituação é a mesma já definida para capitalização simples, tem sua fórmula de cálculo deduzida da fórmula, como segue.

$\mathbf{M} = \mathbf{C}\,(1 + \mathbf{i}\,)^{\mathbf{n}} \Rightarrow \mathbf{C} = \dfrac{\mathbf{M}}{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{M} \times \dfrac{1}{(1+\mathbf{i})^{\mathbf{n}}}$

em que a expressão $\dfrac{1}{(1 + \mathbf{i}\,)^{\mathbf{n}}}$ é chamada Fator de valor atual para pagamento simples (ou único)

2) No final de 2 anos, o Sr Procópio deverá efetuar um pagamento de R$ 200.000,00 referente ao valor de um empréstimo contraído hoje, mais os juros devidos, correspondente a uma taxa de 3,5% ao mês. Qual o valor emprestado?

Dados: **M** = 200.000,00
n = 2 anos = 24 meses
i = 3,5% ao mês
C = ?

Solução:

$\mathbf{C} = \mathbf{M} \times \dfrac{1}{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}}$

$\mathbf{C} = 200.000,00 \times \dfrac{1}{(1 + 0,035)^{24}} = 200.000,00 \times \dfrac{1}{2,28333}$

$\mathbf{C} = 200.000,00 \times 0,43796 = 87.592,00$

HP12C = 200.000,00 **CHS FV** 3,5 **i** 24 **n PV**

3) A loja "Topa Tudo" financia um bem de consumo de uso durável no valor de R$ 16.000,00, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de R$ 52.512,15 no final de 27 meses. Qual a taxa mensal cobrada pela loja?

Dados: **M** = 52.512,15
C =16.000,00
n = 27 meses
i = ?

Solução:

$\mathbf{M} = \mathbf{C}\,(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$

$52.512,15 = 16.000,00(1 + i\,)^{27}$

$52.512,15 \,/\, 16.000,00 = (1 + i)^{27}$

$3,28201 = (1 + i)^{27}$

$\mathbf{i} = 3,28201^{1}/_{27}$

$\mathbf{i} = 1,045 = 1,045 - 1 \times 100 = 4,5\%$ ao mês.

HP12C = 52.512,15 **FV** 16.000,00 **CHS PV** 27 **n i = 4,5% ao mês.**

4) Em que prazo um empréstimo de R$ 55.000,00 pode ser quitado em um único pagamento de R$ 110.624,65, sabendo-se que a taxa contratada é de 15% ao semestre?

Dados: **M** = 110.624,65
C = 55.000,00
i = 15% ao semestre
n = ?

Solução:

$\mathbf{M} = \mathbf{C}\,(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$

$(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} = \mathbf{M} / \mathbf{C}$

$(1 + 0{,}15)^{\mathbf{n}} = 110.624{,}65 / 55.000{,}00$

$(1{,}15)^{\mathbf{n}} = 2{,}01136$

Utilizando a tabela para pagamento único pela fórmula $(1 + i)^n$ à taxa de 15%, verificar o índice 2,01136 ver na coluna n = 5 (5 semestres ou 2 anos e meio)
$(1 + i)^{\mathbf{n}} = (1 + 0{,}15)^5 = 1{,}15^5 = 2{,}01136$ (**hp12C** = 1,15 **E** 5 $\mathbf{y^x}$)

HP12C = 110.624,65 **FV** 55.000,00 **CHS PV** 15 **i n = 5 s ou 2 anos e meio.**

Ou pela fórmula:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{log\ M} - \mathbf{log\ C}}{\mathbf{log}\,(1 + \mathbf{i})}$$

$$n = \frac{\mathbf{log}\ 110.624{,}65 - \mathbf{log}\ 55.000{,}00}{\log (1 + 0{,}15)}$$

$$\mathbf{n} = \frac{11{,}613898 - 10{,}915088}{0{,}139762}$$

$\mathbf{n} = 0{,}698810 / 0{,}139762$

n = 5 semestres ou 2 anos e meio.

HP12C = 110.624,65 **g ln** 55.000,00 **g ln -** 1,15 **g ln :**

2.2 - TAXAS EQUIVALENTES

Diz-se que a taxa mensal $\mathbf{i_m}$ é equivalente à taxa anual $\mathbf{i_a}$ quando:

$$\mathbf{C}(1 + \mathbf{i_a}) = \mathbf{C}(1 + \mathbf{i_m})^{12}$$

ou seja, duas taxas referentes a períodos distintos de capitalização são equivalentes quando produzem o mesmo montante no final de determinado tempo, pela aplicação de um mesmo capital inicial. Da igualdade acima, deduz que:

$$(1 + \mathbf{i_a}) = (1 + \mathbf{i_m})^{12}$$

$\mathbf{i_a} = (1 + \mathbf{i_m})^{12} - 1$ para determinar a taxa anual, conhecida a taxa mensal.

$\mathbf{i_m} = \sqrt[12]{(1 + \mathbf{i_a})} - 1 = (1 + \mathbf{i_a})^{1/12} - 1$ para determinar a taxa mensal, quando se conhece a anual.

Da mesma forma, dada uma taxa mensal ou anual, determina-se a taxa diária e vice-versa.

Exemplos:

1) Determinar a taxa anual equivalente a 2% ao mês.
   $\mathbf{i_a} = (1 + \mathbf{i_m})^{12} - 1$
   $\mathbf{i_a} = (1 + 0{,}02)^{12} - 1 = 1{,}2682 - 1 = 0{,}2682$ ou 26,82% ao ano.
   HP12C = 1,02 E 12 y^x.

2) Determinar a taxa mensal equivalente a 60,103% ao ano.
   $\mathbf{i_m} = (1 + \mathbf{i_a})^{1/12} - 1 = (1 + 0{,}60103)^{1/12} - 1 = (1{,}60103)^{1/12} - 1$
   $\mathbf{i_m} = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$ ou 4% ao mês.
   HP12C = 1,60103 E 12 $1/_x$ y^x .

3) Determinar a taxa anual equivalente a 0,19442% ao dia:
   $\mathbf{i_a} = (1 + \mathbf{i_d})^{360} - 1 = (1{,}0019442)^{360} - 1 = 2{,}0122 - 1 = 1{,}0122$ OU 101,22%
   HP12C = 1,0019442 E 360 y^x

4) Determinar a taxa trimestral equivalente a 47,746% em dois anos:
   $\mathbf{i_t} = (1 + \mathbf{i_{2a}})^{1/8} - 1 = (1{,}47746)^{1/8} - 1 = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$ 0u 5%.
   HP12C = 1,47746 E 8 $^1/_x$ y^x.

5) Determinar a taxa anual equivalente a 1% à quinzena:
   $\mathbf{i_a} = (1 + \mathbf{i_q})^{24} - 1 = (1{,}01)^{24} - 1 = 1{,}2697 - 1 = 0{,}2697$ ou 26,97%
   HP12C = 1,01 E 24 y^x.

Nota: As expressões do tipo $(1 + \mathbf{i})^{1/12}$, $(1 + \mathbf{i})^{1/8}$ ou $(1 + i)^{1/360}$ somente podem ser resolvidas por meio de calculadoras que possuam a função potência, por tentativa e erro ou com auxilio de tabelas financeiras (quando as taxas procuradas estiverem tabeladas); a solução por meio de tábuas logarítmicas também pode ser obtida, embora em muitos casos apresente uma aproximação grosseira.

Como no dia a dia os períodos a que se referem às taxas que se tem e às taxas que se quer são os mais variados, vamos apresentar uma fórmula genérica, que possa ser utilizada para qualquer caso, ou seja;

$$i_q = (1 + i_t)^{q/t} - 1$$

Que para efeito de memorização denominamos as variáveis como segue:

iq = taxa para o prazo que eu quero
it = taxa para o prazo que eu tenho
q = prazo que eu quero
t = prazo que eu tenho

Exemplo:

6) Determinar a taxa para 183 dias, equivalente a 65% ao ano:
   i_q = taxa para 183 dias que eu quero
   i_t = 65% - taxa que eu tenho
   q = 183 dias - prazo que eu quero
   t = 360 dias (ano) - prazo que eu tenho.
   $i_q = (1 + 0{,}65)^{183/360} - 1 = (1{,}65)^{183/360} - 1 = 0{,}2899$ ou 28,99%
   HP12C = 1,65 **E** 183 **E** 360 **:** Y^X 1 **–** 100 **X**

7) Determinar a taxa para 491 dias, equivalente a 5% ao mês.
   $i_{491} = (1{,}05)^{491/30} - 1 = 122{,}23\%$
   HP12C = 1,05 **E** 491 **E** 30 **:** Y^X 1 **–** 100 **X**

8) Determinar a taxa para 27 dias, equivalente a 13% ao trimestre:
   $i_{27} = (1{,}13)^{27/90} - 1 = 3{,}73\%$.
   HP12C = 1,13 **E** 27 **E** 90 **:** Y^X 1 **–** 100 **X**

As soluções dos problemas apresentados foram obtidas por meio de calculadora, utilizando-se a **função potência**.

EXERCÍCIOS:

1. Determinar o montante, no final de 10 meses, resultante da aplicação de um capital de 100.000,00 `a taxa de 3,75% ao mês?
   R = 144.504,39
2. Um agiota empresta 80.000,00 hoje para receber 507.294,46 no final de 2 anos. Calcular as taxas mensal e anual deste empréstimo.
   R = 8% ao mês e 151,817% ao ano.
3. Sabendo-se que a taxa trimestral de juros cobrada por uma instituição financeira é de 12,486%, determinar qual o prazo em que um empréstimo de 20.000,00 será resgatado por 36.018,23.
   R = 5 trimestres ou 15 meses.
4. Quanto devo aplicar hoje, à taxa de 51,107% ao ano, para ter 1.000.000,00 no final de 19 meses?

R = 520.154,96.

5. Uma empresa obtém um empréstimo de 700.000,00 que será liquidado, de uma só vez, no final de 2 anos. Sabendo-se que a taxa de juros é de 25% ao semestre, calcular o valor pelo qual esse empréstimo deverá ser quitado?
   R = 1.708.984,39
6. Em que prazo uma aplicação de 272.307,03 em letras de câmbio, à taxa de 3,25% ao mês, gera um resgate de R$ 500.000,00?
   R = 19 meses.
7. Um terreno está sendo oferecido por R$ 450.000,00 à vista ou R$ 150.000,00 de entrada e mais uma parcela de R$ 350.000,00, no final de 6 meses. Sabendo-se que no mercado a taxa média para aplicação em títulos de renda prefixada gira em torno de 3,5% ao mês, determinar a melhor opção para um interessado que possua recursos disponíveis para comprá-lo.
   R = PRAZO.
8. A que taxa de juros um capital aplicado pode ser resgatado, no final de 17 meses, pelo dobro do seu valor?
   R= 4,162% ao mês.
9. Em quanto tempo um capital pode produzir juros iguais a 50% do seu valor, se aplicado a 3,755% ao mês?
   R = 11 meses.
10. A aplicação de certo capital, à taxa de 69,588% ao ano, gerou um montante de R$ 820.000,00 no final de 1 ano e 3 meses. Calcular o valor dos juros?
    R = 423.711,30
11. Qual é mais vantajoso: aplicar R$ 10.000,00 por 3 anos, a juros compostos de 3% ao mês, ou aplicar esse mesmo valor, pelo mesmo prazo, a juros simples de 5% ao mês?
    R = É melhor aplicar a juros compostos de 3% a m que renderá R$982,78 a mais que a 5% de juros simples.
12. No fim de quanto tempo um capital aplicado à taxa de 4% ao mês, quadruplica o seu valor:
    - no regime de capitalização composta;
    - no regime de capitalização simples.

    R = a) 35,35 meses
    b) 75 meses.
13. Uma loja financia um televisor de R$ 390,00 sem entrada para pagamento em uma única prestação de R$ 700,00 no final de cinco meses. Qual a taxa mensal de juros cobrada por ela?
    R = 12,41% a m
14. Fiz uma aplicação em CDB no valor de R$ 600.000,00 pelo prazo de 85 dias e estimo que a rentabilidade será de 25% ao bimestre. Qual é o montante final?
    R = 823.076,91.
15. Foi oferecido a um aplicador um papel com rentabilidade de 750% ao ano. Qual a taxa mensal?
    R = 19,52% a m.

16. Qual o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R$ 2.700,00 pelo prazo de 12 meses a uma taxa de juros de 7,50% ao mês?
R = 3.730,80.

EXERCÍCIOS:

TAXAS EQUIVALENTES

Determinar as taxas equivalentes:

1. 584,11% ao ano em 60 dias? **R**: 37,78%
2. 750% ao ano em 63 dias? **R**: 45,43%
3. 0,5% ao mês em 1 ano? **R**: 6,17%
4. 17,56% ao mês em 90 dias? **R**: 62,47%
5. 28,55% ao mês em 1 dia? **R**: 0,84%
6. 1 % ao dia em 1 mês? **R**: 34,78%
7. 67% ao bimestre em 15 dias? **R**: 13,68%
8. 0,1% ao dia em 1 ano? **R**: 43,31%
9. 15% a quinzena em 1 mês? **R**: 32,25%.

3 - DESCONTOS

Deve ser entendido como a diferença entre o valor futuro de um titulo e o seu valor atual na data da operação. O valor do desconto está sempre associado a uma taxa e a determinado período. **D** = **S** - **P** onde **D** = valor monetário do desconto; **S** = é o valor futuro do título, o valor assumido pelo título na data do vencimento e **P** = o valor atual.

3.1 - DESCONTOS SIMPLES

É aquele obtido em função de cálculos lineares. São conhecidos dois tipos de descontos simples: o desconto "por fora" (OU BANCÁRIO, OU COMERCIAL) e o desconto "por dentro" (OU RACIONAL). O desconto "por fora" é amplo e generalizadamente utilizado no Brasil, principalmente nas operações de desconto bancário; quanto ao desconto "por dentro", praticamente inexiste em termos de aplicação.

3.1.1 - DESCONTO "por fora" (BANCÁRIO OU COMERCIAL)"

É obtido multiplicando-se o valor de resgate do título pela taxa de desconto, e este produto pelo decorrer até o vencimento do título, ou seja:

$\mathbf{D} = \mathbf{S} \times \mathbf{d} \times \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{D}}{\mathbf{S} \times \mathbf{n}}$, em que **d** é a taxa de desconto e **n** é o prazo.

Exemplo:

1. Qual o valor do desconto "por fora" de um título de R$ 2.000,00, com vencimento para 90 dias, à taxa de 2,5% ao mês?
   Dados: **S** = R$ 2.000,00
   n = 90 dias = 3 meses
   d = 2,5% ao mês
   D = ?
   Solução:
   D = S . d . n
   D = 2.000,00 X 0,025 X 3 = 150,00

2. Qual a taxa mensal de desconto "por fora" utilizada numa operação a 120 dias, cujo valor de resgate é de R$ 1.000,00 e cujo valor atual é de R$ 880,00?
   Dados: **S** = 1.000,00
   n = 120 dias = 4 meses
   P = 880,00
   d = ?

Solução:

D = **S** - **P** = 1.000,00 - 880,00 = **120,00**

$$d = \frac{D}{S \cdot n} = \frac{120,00}{1.000,00 \cdot 4} = \frac{120,00}{4.000,00} = 0,03 \text{ ou } 3\% \text{ ao mês.}$$

3. Uma duplicata no valor de R$ 6.800,00 é descontada por um banco, gerando um crédito de R$ 6.000,00 na conta do cliente. Sabendo-se que a taxa cobrada pelo banco é de 3,2% ao mês, determinar o prazo de vencimento da duplicata?

Dados:

S = 6.800,00
P = 6.000,00
d = 3,2% ao mês
n = ?

Solução:

D = **S** - **P** = 6.800,00 - 6.000,00 = **800,00**

$$D = S \cdot d \cdot n \Rightarrow n = \frac{D}{S \cdot d}$$

$$n = \frac{800,00}{6.800,00 \cdot 0,032} = \frac{800,00}{217,60} = 3,676471 \text{ meses ou 110 dias}$$

3 meses = 90 dias
0,676471 = (30 . 0,676471)= 20 dias = (90 + 20 = 110)

Para achar o valor atual "**P**" a fórmula é a seguinte: **P** = **S**.(1 – **d** . **n**)

3.1.2 - DESCONTO "por dentro"(OU racional)

É obtido multiplicando-se o valor atual do título pela taxa de desconto, e este produto pelo prazo a decorrer até o vencimento do título, ou seja:

$$D = P \cdot d \cdot n \Rightarrow d = \frac{D}{P \cdot n}$$

Entretanto, na prática, o valor atual do título é sempre uma incógnita, sendo conhecidos o seu valor nominal (**S**), o prazo (**n**) e a taxa de desconto (**d**).

FÓRMULA PARA ACHAR O DESCONTO POR DENTRO:

$$D = S \cdot \frac{d \cdot n}{1 + d \cdot n}$$

Exemplos:

1. Calcular o valor do desconto "por dentro" de um título de R$ 2.000,00, com vencimento para 90 dias, à taxa de 2,5% ao mês.

Dados:

S = 2.000,00
n = 90 dias ou 3 meses
d = 2,5% ao mês
D = ?

Solução:

$$D = S \cdot \frac{d \cdot n}{1 + d \cdot n}$$

$$D = 2.000,00 \cdot \frac{0,025 \cdot 3}{1 + 0,025 \cdot 3} = 2.000,00 \cdot \frac{0,075}{1,075} = 2.000,00 \cdot 0,069767$$

D = **139,53**

2. Calcular a taxa mensal de desconto "por dentro" utilizada numa operação de 120 dias, cujo valor de resgate do titulo é de R$ 1.000,00 e cujo valor atual é de R$ 880,00.

Dados:

S = 1.000,00
P = 880,00
n = 120 dias ou 4 meses
d = ?

Solução :

D = **S** - **P** = 1.000,00 - 880,00 = 120,00

$$d = \frac{D}{P \cdot n} = \frac{120,00}{880,00 \cdot 4} = \frac{120,00}{3.520,00}$$ = **0,03409 ou 3,409% ao mês**.

3. Sabendo-se que o desconto de um título no valor de R$ 6.800,00 resultou em um crédito de R$ 6.000,00 na conta do cliente, e que a taxa cobrada pelo banco é de 3,2% ao mês, calcular o prazo do título?

Dados:

S = 6.800,00
P = 6.000,00
d = 3,2% ao mês
n = ?

Solução:

D = **S** - **P** = 6.800,00 - 6.000,00 = **800,00**

D = **P . d . n**

$$n = \frac{D}{P \cdot d} \qquad n = \frac{800,00}{6.000,00 \cdot 0,032} = \frac{800,00}{192,00}$$ = 4,167 m ou 125 d.

Os exemplos de desconto por dentro e por fora foram desenvolvidos com valores iguais com o objetivo de mostrar os diferentes resultados obtidos com a utilização de um ou outro critério.

Para achar o valor atual " **P** " a fórmula é a seguinte: $P = S \times \left[\left(\frac{d \cdot n}{1 + d \cdot n} \right) - 1 \right]$

3.1.3 - CÁLCULO DO VALOR DO DESCONTO "POR FORA" PARA SÉRIE DE TÍTULOS DE MESMO VALOR.

Vamos admitir que sejam apresentados a um banco 5 títulos, no valor de R$ 1.000,00 cada um, com vencimentos de 30 a 150 dias, respectivamente, para serem descontados. Sabendo-se que a taxa de desconto cobrada pelo banco é de 3% ao mês, calcular o valor do desconto global e o valor liquido correspondente a ser creditado na conta do cliente. As novas variáveis serão representadas pelos seguintes símbolos:

Dt = Valor do desconto total = **D1+ D2 + D3...... Dn**
N = numero de títulos ou prestações
Pr = valor líquido dos títulos = **N . S – Dt**

a) Obtenção do desconto global, a partir do cálculo individual, para cada título:
Sendo **D** = **S** . **d** . **n**, tem-se que:

D1 = 1.000,00 . 0,0 3 . 1 = 30,00
D2 = 1.000,00 . 0,03 . 2 = 60,00
D3 = 1.000,00 . 0,03 . 3 = 90,00
D4 = 1.000,00 . 0,03 . 4 = 120,00
D5 = 1.000,00 . 0,03 . 5 = 150,00

Dt = 30,00 + 60,00 + 90,00 + 120,00 + 150,00 = **450,00**

b) Dedução de uma fórmula que possibilita obter o desconto total de forma simplificada
Com base no desenvolvimento feito no item anterior, podemos escrever:

Dt = **D1 + D2 + D3 + D4 + D5**
Dt = 1.000,00 . 0,03 . 1 + 1.000,00 . 0,03 . 2 + 1.000,00 . 0,03 . 3 + 1.000,00 . 0,03 . 4 + 1.000,00 . 0,03 . 5
Dt = (1.000,00 . 0,03). (1+ 2 + 3 + 4 + 5)

Aplicando-se a fórmula que dá a soma de uma progressão aritmética (**Spa**)

$Spa = \frac{(t1 + tn) \cdot N}{2}$, em que **t1** representa o prazo do título que vencer primeiro, **tn** o prazo do título que vence por último e **N** o número de títulos, temos:

$$\mathbf{Dt} = 1.000{,}00 \cdot 0{,}03 \cdot \left[\frac{(1+5) \cdot 5}{2}\right] \qquad \mathbf{(1)}$$

Dt = 1.000,00 . 0,03 . (3 . 5)
Dt = 1.000,00 . 0,03 . 15 = **450,00**
Valor líquido creditado na conta do cliente seria:
P = **S** . **N** - **Dt** = 1.000,00 . 5 - 450,00 = 4.550,00

Substituindo na expressão **(1)** cada número pelo seu símbolo correspondente, temos:

$\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \cdot \frac{(\mathbf{t1} + \mathbf{tn}) \cdot \mathbf{N}}{2}$ ou $\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{t1} + \mathbf{tn}}{2}$, em que a expressão $(\mathbf{t1} + \mathbf{tn})/2$ representa o prazo médio dos títulos descontados.

Essa fórmula somente é valida para desconto de séries de títulos ou de prestações com valores iguais, de vencimentos sucessivos e de periodicidade constante a partir do primeiro vencimento.

Quando os vencimentos ocorrem no final dos períodos unitários, a partir do primeiro, a fórmula para determinar o desconto total de uma série de títulos pode ser descrita como segue:

$\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{1} + \mathbf{tn}}{2}$, em que **tn**, que representa o prazo expresso em número de períodos unitários (mês, bimestre, ano, etc.) referente ao título que vence por ultimo, será sempre igual ao nº de títulos **N**.

É importante lembrar que o período unitário da **taxa deve estar sempre coerente** com o **período unitário do prazo**, isto é, se na fórmula de cálculo os prazos forem representados em meses, trimestres ou anos, a taxa de desconto também deve ser representada em termos de taxa mensal, trimestral ou anual, respectivamente.

Exemplos:

1. Calcular o valor líquido correspondente ao desconto bancário de 12 títulos, no valor de R$ 1.680,00 cada um, vencíveis de 30 a 360 dias, respectivamente, sendo a taxa de desconto cobrada pelo banco de 2,5% ao mês.
   Dados:
   S = 1.680,00
   N = **tn** = 12 meses
   d = 2,5% ao mês
   P = ? Valor líquido total.

Solução:

$\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \cdot \dfrac{1+12}{2} = 1.680{,}00 \cdot 12 \cdot 0{,}025 \cdot 6{,}5 = \mathbf{3.276{,}00}$

$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{Dt} = 1.680{,}00 \cdot 12 - 3.276{,}00 = \mathbf{16.884{,}00}$

OU

$\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \cdot \dfrac{1+tn}{2} = 1.680{,}00 \cdot 12 \cdot 0{,}025 \cdot (1 + 12)/2$

$\mathbf{Dt} = 1.680{,}00 \cdot 12 \cdot 0{,}025 \cdot 6{,}5 = 3.276{,}00$

$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{Dt} = 1.680{,}00 \cdot 12 - 3.276{,}00 = \mathbf{16.884{,}00}$

HP12C = 1.680,00 **E** 12 **X** 0,025 **X** 1 **E** 12 **+** 2 **:** **X** 1.680,00 **E** 12 **X** **-**
1.680,00 **E** 12 **X** **STO1** 0,025 **X** 1 **E** 12 **+** 2 **:** **X** **RCL1** **–**

2. Quatro duplicatas, no valor de R$ 32.500,00 cada uma, com vencimentos para 90, 120, 150 e 180 dias, são apresentadas para desconto. Sabendo-se que a taxa de desconto cobrada pelo banco é de 3,45% ao mês, calcular o valor do desconto?

Dados:

S = 32.500,00
N = 4
d = 3,45% ao mês
t1 = 90 dias = 3 meses
tn = 180 dias = 6 meses
Dt = ?

Solução:

$\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \cdot \dfrac{\mathbf{t1} + \mathbf{tn}}{2} = 32.500{,}00 \cdot 4 \cdot 0{,}0345 \cdot \dfrac{3+6}{2}$

$\mathbf{Dt} = 32.500{,}00 \cdot 4 \cdot 0{,}0345 \cdot 4{,}5 = \mathbf{20.182{,}50}$

HP12C = 32.500,00 **E** 0,0345 **X** 4 **X** 3 **E** 6 **+** 2 **:** **X**

3. Uma empresa apresenta 9 títulos do mesmo valor para serem descontados em um banco. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 2,8% ao mês, que os títulos vencem de 30 em 30 dias, a partir da data de entrega do borderô , e que o valor líquido creditado a empresa foi de R$ 25.000,00, calcular o valor de cada título.

Dados:

Pt = 25.000,00
N = **tn** = 9
d = 2,8% ao mês
S = ?

Solução:

$\mathbf{Pt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{Dt} \Rightarrow \mathbf{S} = \dfrac{\mathbf{Pt} + \mathbf{Dt}}{\mathbf{N}} = \dfrac{25.000{,}00 + \mathbf{Dt}}{9} \ (1)$

$\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \cdot \dfrac{1+tn}{2} = \mathbf{S} \cdot 9 \cdot 0{,}028 \cdot \dfrac{1+9}{2}$

$\mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot 9 \cdot 0{,}028 \cdot 5 = \mathbf{Dt} = \mathbf{S} \cdot 1{,}26 = 1{,}26 \cdot \mathbf{S} \ (2)$

Substituindo (2) em (1), tem-se que:

$$\mathbf{S} = \frac{25.000,00 + 1,26\ .\ \mathbf{S}}{9} = 9\ .\mathbf{S} - 1,26\ \mathbf{S} = 25.000,00$$

9.**S** - 1,26.**S** = 25.000,00
7,74 .**S** = 25.000,00
S = 25.000,00/7,74 = **3.229,97** cada um
HP12C = 25.000,00 **E** 9 **E** 0,028 **X** 5 **X** 9 **- CHS**

4. Um consumidor deseja liquidar antecipadamente 6 prestações restantes de um financiamento obtido para a compra de um veículo. Sabendo-se que o valor de cada prestação é de R$ 30.000,00; que a primeira prestação vence a 30 dias de hoje e a última 180 dias, e que o desconto dado pela financeira é de 1% ao mês (desconto bancário ou por fora), calcular o valor a ser pago pelo financiado para liquidar o contrato?

Dados:
S = 30.000,00
N = tn = 6
d = 1% ao mês
Pt = ?

Solução:

$$\mathbf{Dt} = \mathbf{S}\ .\ \mathbf{N}\ .\ \mathbf{d}\ .\ \frac{1+\mathbf{tn}}{\mathbf{2}} = 30.000,00\ .\ 6\ .\ 0.01\ .\ \frac{1+6}{\mathbf{2}} =$$

Dt = 30.000,00 . 6 . 0.01 . 3,5 = **6.300,00**
Pt = **S** . **N** - **Dt** = 30.000,00 . 6 - 6.300,00 = **173.700.00**
HP12C = 30.000,00 **E** 6 **X STO1** 0,01 **X** 1 **E 6 X** 2 **: X RCL1 -**

5. Oito títulos, no valor de R$ 1.000,00 cada um, são descontados por um banco, cujo líquido correspondente, no valor de R$ 6.830,00, é creditado na conta do cliente. Sabendo-se que os vencimentos desses títulos são mensais e sucessivos a partir de 30 dias, calcular a taxa de desconto?

Dados:
S = 1.000,00
Pt = 6.830,00
N = **tn** = 8
d = ?

Solução:

$$\mathbf{Dt} = \mathbf{S}\ .\ \mathbf{N}\ .\ \mathbf{d}\ .\ \frac{1+\mathbf{tn}}{2}$$

Dt = **S** . **N - Pt** = 1.000,00 . 8 - 6.830,00 = 1.170,00

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{Dt}}{\mathbf{S}\ .\ N\ .\ \frac{1+\mathbf{tn}}{2}} = \frac{1.170,00}{1.000,00\ .\ 8\ .\ \frac{1+8}{2}} = \frac{1.170,00}{36.000,00}$$

d = 0,0325 ou 3,25% ao mês.

HP = 1.000,00 **E** 8 **X** 6.830,00 **-** 1.000,00 **E** 8 **X :** 100 **X** 4,5 **:** **= 3,25%**
HP = 1.000,00 **E** 8 **X** 6.830,00 **–** 1.000,00 **E** 8 **X** 1 **E** 8 **+** 2 **: X :** 100 **X**

3.2 - DESCONTO COMPOSTO

Desconto composto é aquele obtido em função de cálculos exponenciais. São conhecidos dois tipos de descontos: **o desconto composto "por fora" e o desconto composto "por dentro", ou racional**. O desconto composto "por fora", não possui, pelo menos no Brasil, nenhuma utilização prática conhecida. Quanto ao desconto "por dentro" ou racional, ele nada mais é do que a diferença entre o valor futuro de um título e o seu valor atual, determinado com base no regime de capitalização composta; portanto de aplicação generalizada.

3.2.1 - DESCONTO COMPOSTO "´POR FORA"

No caso do desconto simples "por fora", a taxa de desconto incide somente sobre o valor futuro dos títulos, tantas vezes, quantos forem os períodos unitários, ou seja, $\mathbf{D} = \mathbf{S} \times \mathbf{d} \times \mathbf{n}$. Como $\mathbf{P} = \mathbf{S} - \mathbf{D}$, deduz-se que $\mathbf{P} = \mathbf{S}.(1 - \mathbf{d} \times \mathbf{n})$.

Já no caso do desconto composto, para **n** períodos unitários, a taxa de desconto incide, no primeiro período, sobre o valor do título; no segundo período, sobre o valor futuro do título menos o valor de desconto correspondente ao primeiro período; no terceiro período sobre o valor futuro do título menos os valores dos descontos referentes ao primeiro e ao segundo período, e assim sucessivamente até o enésimo período, de forma que:

$\mathbf{P1} = \mathbf{S} - \mathbf{D}$ ou $\mathbf{P} = \mathbf{S}(1 - \mathbf{d})$
$\mathbf{P2} = \mathbf{S}(1-\mathbf{d})(1-\mathbf{d}) = \mathbf{S}(1-\mathbf{d})^2$
$\mathbf{P3} = \mathbf{S}(1-\mathbf{d})(1-\mathbf{d})(1-\mathbf{d}) = \mathbf{S}(1-\mathbf{d})^3$
. .
. .
$\mathbf{Pn} = \mathbf{S}\ (1-\mathbf{d})^{\mathbf{n}}$

Assim o valor líquido de um título, de prazo igual a **n** períodos unitários que sofre um desconto composto "por fora", é dado pela expressão:

$$\mathbf{P = S(1-d)^n}$$

Exemplos:

1. Uma taxa de 2,5% ao mês, de um título de R$ 28.800,00, com vencimento para 120 dias. Calcular o valor do desconto, de acordo com o conceito de desconto composto "por fora"
   Dados:
   S = 28.800,00
   n = 120 dias = 4 meses
   d = 2,5% ao mês
   D = ?

Solução:

$P = S(1-d)^n$

P = 28.800,00(1-0,025)⁴ = 28.800,00 x 0,903688 =**26.026,21**

D = **S** - **P** = 28.800,00 - 26.026,21 = **2.773,79**

HP12C = 28.800,00 **E** 2,5 **E** 100 **:** 1 **–** 4 **Y^X** **X** 28.800,00 **-** = 2,773,79

2. Um título, com 90 dias a vencer, foi descontado à taxa de 3% ao mês, produzindo um desconto no valor de R$ 1.379,77. Calcular o valor nominal do título.

Dados:

D = 1.379,77
d = 3% ao mês
n = 90 dias ou 3 meses
S = ?

Solução:

$D = S - P = S - S(1-d)^n = S\,[1-(1-d)^n]$

$D = S\,[1-(1-d)^n]$

$1.379,77 = S\,[\,1 - (1 - 0,03)^3]$

$1.379,77 = S\,[\,1 - 0,912673]$

$1.379,77 = S \times 0,087327$

$S = 1.379,77/0,087327 = 15.800,00$

HP12C = 1**E** 0,03**-**3 **Y^X** 1**- CHS 1/x** 1.379,77 **X = 15.800,00**

3.2.2 - DESCONTO “POR DENTRO” OU RACIONAL

Desconto “por dentro” ou racional, é dado pela diferença entre o valor futuro de um título e o seu valor atual, calculado com base no regime de capitalização composta, como segue:

$$D = S - P = S - \frac{S}{(1+i)^n} = S \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}$$

Para manter a coerência no que se refere a simbologia adotada, vamos continuar a representar a taxa de desconto por **d** . Assim a fórmula anterior pode ser escrita como segue:

$$D = S \times \frac{(1+d)^n - 1}{(1+d)^n}$$

Exemplos:

1. Determinar o valor do desconto composto racional de um título no valor de R$ 50.000,00, sabendo-se que o seu prazo é de 5 meses e que a taxa de desconto cobrada é de 3,5% ao mês.

Dados:

S = 50.000,00
n = 5 meses
d = 3,5% ao mês
D = ?

Solução:

D = **S** x $(1 + \mathbf{d})^n - 1 / (1+d)^n$
D = 50.000,00 X $(1 + 0{,}035)^5 - 1/(1 + 0{,}035)^5$
D = 50.000,00 X $(1{,}035)^5 - 1/(1{,}035)^5$
D = 50.000,00 X 0,18769/1,18769 = 50.000,00 X 0,15803
D = **7.901,50**

HP12C = 1,035**E**5**YX** 1**-E** 1,035**E**5**YX :** 50.000,00 **X = 7.901,50**

HP12C = 50.000,00 **CHS FV** 3,5 **i** 5 **n PV** 50.000,00 **-** = **7.901,34**

2. Uma empresa obtém um empréstimo para ser pago no final de 12 meses, em um único pagamento de R$ 1.800.000,00, à taxa de 4,5% ao mês. Decorridos exatamente 5 meses, a empresa resolve liquidar antecipadamente esse empréstimo. Admitindo-se que ela obtenha um desconto calculado a uma taxa equivalente à taxa de juros cobrada na operação de empréstimo, determinar o valor líquido a ser pago pela empresa, de acordo com o conceito de desconto composto “por dentro”.

Dados:

S = 1.800.000,00
n = 7 meses(prazo contratual menos prazo decorrido)
d = 4,5% ao mês
P = ?

Solução:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}}{(1 + \mathbf{d})^n}$$

P = 1.800.000,00/ $(1+0{,}045)^7$ = 1.800.000,00/ $(1{,}045)^7$
P = 1.800.000,00 / 1.36086 = **1.322.693,00**

HP12C = 1.800.000,00 **E** 1,045 **E** 7 **y^x : = 1.322.693,00**
1.800.000,00 **CHS FV** 4,5 **i** 7 **n PV = 1.322.693,00**

PROBLEMAS PROPOSTOS

DESCONTOS SIMPLES

1. Uma duplicata de R$ 70.000,00, com 90 dias a decorrer até o seu vencimento, foi descontada por um banco à taxa de 2,70% ao mês. Calcular o valor líquido entregue ou creditado ao cliente:
   - de acordo com o conceito de desconto bancário ou "por fora"
   - de acordo com o conceito de desconto racional ou "por dentro"

   R = a) R$ 64.330,00
   b) R$ 64.754,86
2. Calcular o valor do desconto, "por fora" e "por dentro", de um título de R$ 100.000,00, com 115 dias a vencer, sabendo-se que a taxa de desconto é de 3% ao mês para ambos os critérios.
   R = R$ 11.500,00 "por fora"
   R$ 10.313,90 "por dentro"
3. Sabendo-se que o desconto de uma duplicata no valor de R$ 25.000,00, com 150 dias a vencer, gerou um crédito de R$ 22.075,06 na conta do cliente, determinar a taxa mensal de desconto, de acordo com as duas conceituações conhecidas.
   R = 2,34% "por fora"
   2,65% "por dentro"
4. Dois títulos, no valor de R$ 10.000,00 cada um, foram descontados à taxa de 2,5% ao mês, gerando um desconto de R$ 1.000,00 para cada um deles. Sabendo-se que a operação com um dos títulos foi feita de acordo com o conceito de desconto bancário, e o outro de acordo com o conceito de desconto racional, calcular os prazos dos respectivos títulos.
   R =120 dias - desconto bancário
   130 dias - desconto racional.
5. Um título de R$ 140.000,00 foi descontado a 33% ao ano, 5 meses antes do seu vencimento. Determinar o valor líquido entregue ao seu portador, de acordo com os conceitos de desconto bancário "por fora" e racional "por dentro".
   R = R$ 120.750,00 - "por fora"
   R$ 123.076,92 - "por dentro".
6. Determinar o valor nominal ou de face de um título, com 144 dias para o seu vencimento, que descontado à taxa de 48% ao ano proporcionou um valor atual (líquido creditado) de R$ 38.784,00. Sabe-se que a operação foi feita de acordo com o conceito tradicional, ou seja, desconto comercial ou "por fora".
   R = R$ 48.000,00
7. Sendo de R$ 3.419,44 o valor do desconto racional ou "por dentro" de uma duplicata, descontada à taxa de 3,55% ao mês, 120 dias antes do seu vencimento, calcular o valor do seu desconto bancário, à mesma taxa.
   R = R$ 3.905,00

8. Sendo de R$ 2.800,00 o valor do desconto comercial ou "por fora" de um título de valor de face igual a R$ 16.000,00, determinar o valor do seu desconto racional ou "por dentro", à mesma taxa.
   R = R$ 2.382,98
9. Determinar quantos dias faltam para o vencimento de uma duplicata, no valor de R$ 9.800,00, que sofreu um desconto bancário de R$ 548,50, à taxa de 32% ao ano.
   R = 63 dias
10. Uma pessoa obteve um financiamento, para aquisição de um veículo, para ser quitado em 18 prestações mensais, iguais e consecutivas de R$ 9.470,00. No dia do vencimento da 10ª prestação, após ter pago esta, o financiado propõe à financeira a quitação, nesta data, das 8 prestações restantes. Sabendo-se que essa financeira concede um desconto bancário ou "por fora" de 1,8% ao mês para pagamentos antecipados, calcular o valor do desconto total concedido.
    R = R$ 6.136,56
11. Uma empresa apresenta a um banco, para desconto, 4 duplicatas no valor de R$ 32.600,00 cada uma, com vencimentos para 60, 120, 180 e 240 dias. Calcular o valor líquido creditado pelo banco na conta da empresa, sabendo-se que se trata de um desconto comercial ou "por fora" e que a taxa de desconto cobrada é de 2,4% ao mês.
    R = R$ 114.752,00
12. Determinar o número de títulos com vencimentos sucessivos de 30 em 30 dias, descontados à taxa de 3,3% ao mês, segundo o conceito de desconto bancário ou "por fora", sabendo-se que todos são de mesmo valor, igual a R# 13.000,00 cada um, e cujo desconto total é de R$ 12.012,00.
    R = 7 títulos
13. Determinar a que taxa devem ser descontados 3 títulos, no valor de R$ 6.000,00 cada um, com vencimento para 30, 60 e 90 dias, para que se tenha um valor atual, global, de R$ 16.524,00, segundo o conceito de desconto bancário.
    R = 4,1% ao mês

DESCONTOS COMPOSTOS - RACIONAL OU "POR DENTRO"

1. Calcular o valor atual de uma letra de câmbio de valor de resgate igual a R$ 90.000,00, com 120 dias a vencer, sabendo-se que a taxa de desconto é de 3,25% ao mês.
   R = R$ 79.192,17
2. Sabendo-se que o valor líquido do creditado na conta de um cliente foi de R$ 57.100,71, correspondente ao desconto de um título de R$ 66.000,00, à taxa de 42,576% ao ano, determinar o prazo a decorrer até o vencimento desse título.
   R = 4,9 meses, ou 147 dias.
3. Calcular a que taxa mensal um título de R$ 100.000,00, com 75 dias a vencer, gera um desconto no valor de R$ 13.044,10.
   R = 5,75% ao mês
4. Calcular o valor do desconto concedido num Certificado de Depósito Bancário, de valor de resgate igual a R$ 200.000,00, sabendo-se que faltam 90 dias para o vencimento e que a taxa de desconto é de 3,5% ao mês.
   R = R$ 19.611,46.

4 - SÉRIE DE PAGAMENTO:

4.1 - NOÇÕES SOBRE FLUXO DE CAIXA

Fluxo de caixa de uma empresa pode ser entendido como uma sucessão de recebimentos e ou pagamentos, em dinheiro, previstos para determinado período de tempo.

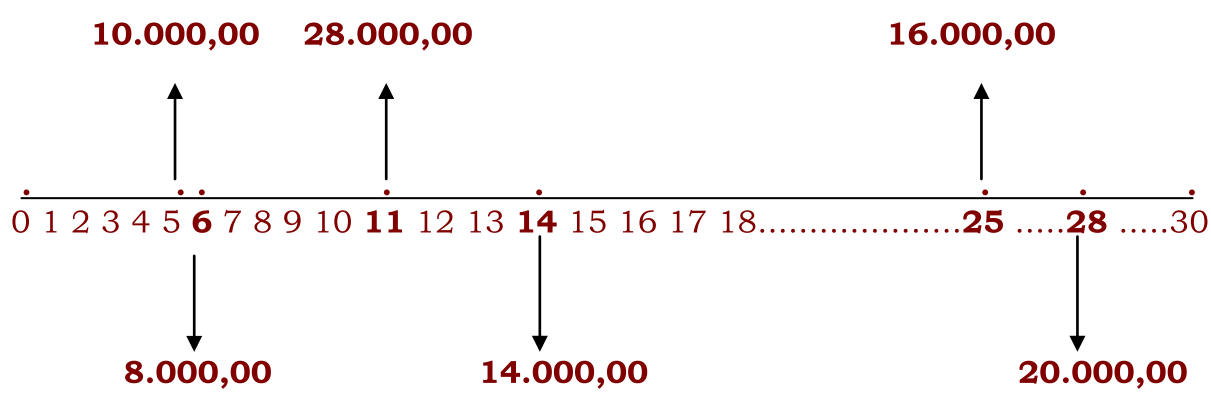
Para facilitar o entendimento dos problemas a serem apresentados, será utilizada a representação gráfica do fluxo de caixa, como mostra o exemplo a seguir correspondente a um fluxo de caixa mensal.

Recebimentos previstos

Dia	valor R$
5	10.000,00
11	28.000,00
25	16.000,00

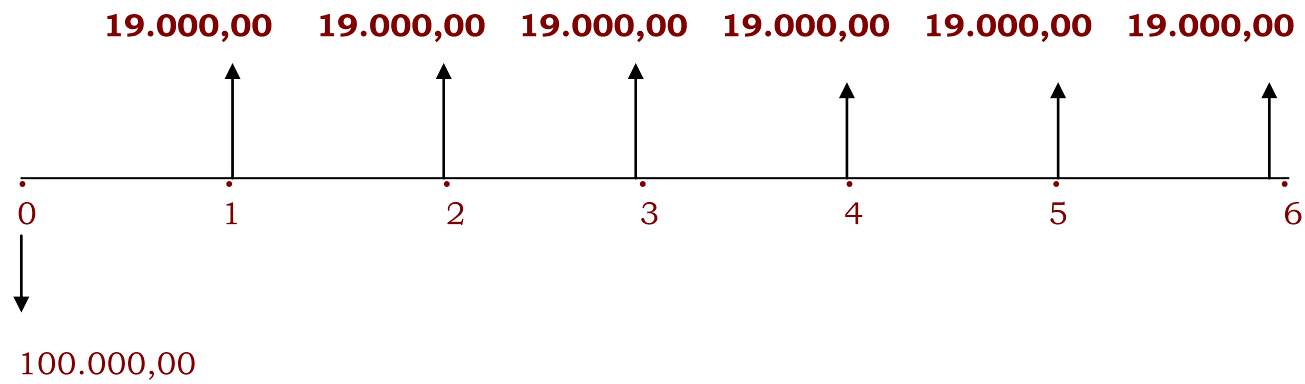
Pagamentos previstos

Dia	valor R$
6	8.000,00
14	14.000,00
28	20.000,00

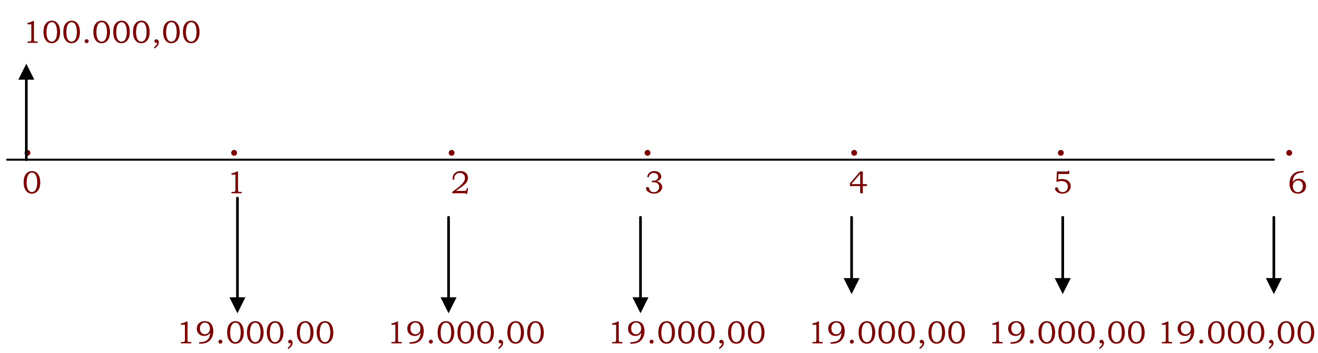


No eixo horizontal é representado o tempo (dia, mês, ano, etc.) orientados da esquerda para a direita, de tal forma que todos os pontos são considerados como momentos futuros em relação ao ponto zero.

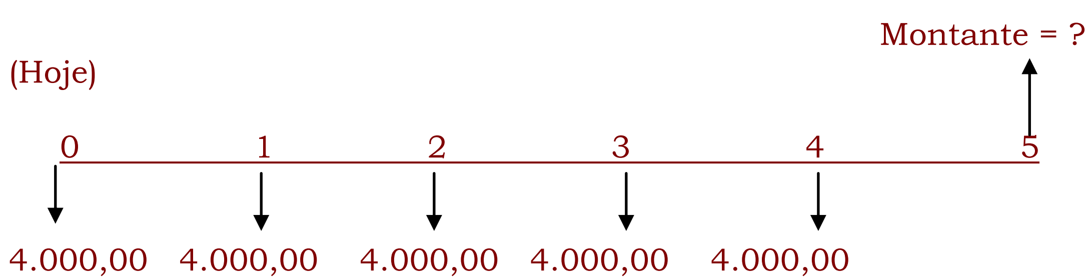
Um banco concede um empréstimo de R$ 100.000,00 a um cliente, para pagamento em 6 prestações iguais de R$ 19.000,00. Represente graficamente o fluxo de caixa. Do ponto de vista do banco, a representação gráfica do fluxo de caixa é a seguinte:



ou seja, há uma saída inicial de caixa no valor de R$ 100.000,00 e a entrada de 6 parcelas de R$ 19.000,00 cada uma nos meses seguintes. Do ponto de vista do cliente, a orientação das setas é feia no sentido inverso, como segue:



O Sr. Miguel resolve aplicar, em uma instituição financeira, 5 parcelas iguais, mensais e consecutivas de R$ 4.000,00. Sabendo-se que 1ª parcela será efetivada hoje e que o Sr. Miguel deseja saber o valor do montante no final do 5º mês. Representar o fluxo de caixa correspondente.



Neste exemplo, o problema é colocado sob o ponto de vista do aplicador, portanto as setas correspondentes às parcelas mensais de aplicação devem ser orientadas para baixo, pois representam saída de caixa para o Sr. Miguel; e a seta correspondente ao montante é orientada para cima porque, por ocasião do resgate, representando uma entrada de caixa para o aplicador.

4.2 SÉRIE DE PAGAMENTO

Após termos conceituado o fluxo de caixa, vamos focalizar os problemas relacionados a séries de pagamentos, objetivo principal deste capítulo. As séries de pagamentos podem ser definidas como uma sucessão de pagamentos ou recebimentos $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_3}$...... $\mathbf{V_n}$,(**V** = valor), e com vencimentos sucessivos $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$ ....$\mathbf{t_n}$, (**t** = termo/prazo)

Dentro da matemática financeira tradicional, as séries de pagamentos são objeto de uma classificação muito ampla e complexa que, em vez de facilitar ao estudante, normalmente o confunde. Para atender à finalidade pratica desta matéria, vamos desenvolver as séries de pagamentos com as seguintes características:

a) A diferença de prazo entre cada termo e o seguinte é constante, ou seja, os vencimentos dos termos, a partir do primeiro, variam de 30 em 30 dias, de 60 em 60 dias, de 180 em 180 dias e assim por diante.

b) O número de termos é finito; não vamos tratar aqui das “rendas perpétuas”, cujo número de termos é infinito.

c) Os valores dos termos que compõem a série pode ser:
$\mathbf{C_1}$ – constantes (iguais ou uniformes);
$\mathbf{C_2}$ – variáveis (de forma aleatória ou de acordo com uma progressão aritmética ou geométrica).

d) Os vencimentos dos termos de uma série de pagamentos podem ocorrer no final de cada período (termos vencidos) ou no inicio (termos antecipados); o entendimento desta classificação, como veremos, é de fundamental importância.

Com base nessas características, vamos desenvolver séries de pagamentos de acordo com a seguinte classificação:

1) **Série de pagamentos iguais com termos vencidos**;
2) **Série de pagamentos iguais com termos antecipados**;
3) **Série de pagamentos variáveis com termos vencidos**;
4) **Série de pagamentos variáveis com termos antecipados**.

4.2.1 - SÉRIE DE PAGAMENTOS IGUAIS COM TERMOS VENCIDOS

Cada termo da série de pagamentos ou recebimentos iguais será representado por "**R**"; as demais variáveis serão representados pelos símbolos já conhecidos:

i = taxa de juros, coerente com a unidade de tempo (mês, trimestre, ano, etc.)
n = número de unidades de tempo (coincidente com o n.º de prestações)
C = principal, capital inicial, valor atual ou valor presente.
M = montante ou capital no fim do prazo n

4.2.2 - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL (FAC)

A formula do fator de acumulação de capital (**FAC**) é demonstrada da seguinte forma:

$$\frac{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} - 1}{\mathbf{i}}$$

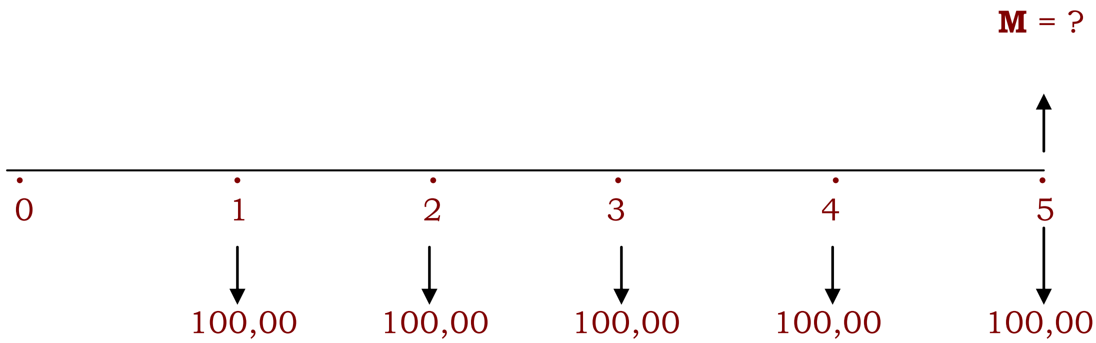
Para simplificar $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \frac{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} - 1}{\mathbf{i}}$ ou $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{FAC}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$

O fator de acumulação de capital aparece na tabela anexa a este material, calculado para diversas taxas e prazos. Com o conhecimento deste fator, obtido através de uma tabela financeira, a solução torna-se muito mais simples. Assim, tal solução pode ser indicada como segue referente ao seguinte problema:

Determinar o valor do montante, no final do 5º mês, de uma série de 5 aplicações mensais, iguais e consecutivas, no valor de 100,00 cada uma, a uma taxa de 4% ao mês, sabendo-se que a primeira parcela é aplicada no final de 30 dias da data tomada como base ("momento zero), e que a última, no final do 5º mês, é coincidente com o momento em que é pedido o montante.

R = 100,00 **PMT (HP)**
i = 4% ao m
n = 5
M = ?

Fluxo de caixa.



Solução: **M** = **R** x **FAC** (**i**, **n**)
M = 100,00 x **FAC**(4%, 5)

Na tabela anexa referente ao FAC , correspondente a uma taxa de 4% (que neste caso representa 4% ao mês) e na linha correspondente a **n** = 5 (que neste caso representa 5 meses), vamos encontrar o valor 5,41632
Substituindo temos: **M** = 100,00 x 5,41632 **M** = $\boxed{541,63}$

Pela fórmula temos:

$$M = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad M = 100,00 \times \frac{(1 + 0,04)^5 - 1}{0,04}$$

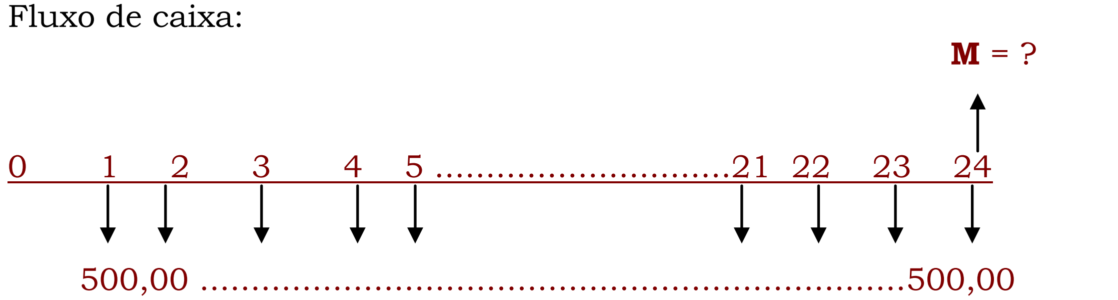
M = 100,00 x $(1,04)^5 - 1$ / 0,04 **M** = 100,00 x 02167/0,04
M = 100,00 x 5,4163 = $\boxed{541,63}$

HP12C = 100 CHS PMT 5 n 4 i FV = 541,63

Resolvamos outro problema para melhor fixar o entendimento.

Quanto terá, no final de 4 anos, uma pessoa que aplicar R$ 500,00 por mês, durante esse prazo, em “fundo de renda fixa”, à taxa de 3% ao mês ?

Fluxo de caixa:



Dados:

R = 500,00
n = 24 prestações (porque durante 2 anos temos 24 meses)
i = 3% ao mês (aplicações mensais)
M = ?

Solução:

M = **R** x FAC (i, **n**)
M = 500,00 x **FAC**(3%, 24)

Na tabela **FAC**, definida para 3% e na coluna definida para **n** = 24 vamos encontrar o n.º 34,42647, portanto;

M = 500,00 x 34,42647 = 52.204,20

HP12C = 500 CHS PMT 24 n 3i FV = 17213,24

Pela fórmula temos:

$$M = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad M = 500{,}00 \times \frac{(1 + 0{,}03)^{24} - 1}{0{,}03}$$

M = 17.213,24

4.2.3 - FATOR DE FORMAÇÃO DE CAPITAL (FFC)

O FFC é obtido a partir da fórmula do montante deduzida do item anterior (FAC)

$$S = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Essa fórmula, como vimos, é utilizada para obter o valor do montante, quando são conhecidos, o valor das prestações, a taxa e o n.º de prestações. Quando a incógnita do problema é o valor das prestações, basta fazer:

$$R = \frac{M}{\frac{(1 + i)^n - 1}{i}} \qquad R = M \times \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \quad (1)$$

em que $\frac{\mathbf{i}}{(1+\mathbf{i})^{n}-1}$ é chamado Fator de Formação de Capital (**FFC**), representado por **FFC** (**i**, **n**). Portanto a expressão (1) pode ser assim escrita:

R = **M** x **FFC** (**i**, **n**)

Exemplo de aplicação:

Quanto uma pessoa terá de aplicar mensalmente num “fundo de renda fixa”, durante 5 anos, para que possa resgatar R$ 200.000,00 no final de 24 meses, sabendo que o fundo proporciona um rendimento de 2% ao mês?

Esquematicamente:

Dados:

- **M** = 200.000,00
- **n** = 60 meses
- **i** = 2% ao mês
- **R** = ?

Solução:

R = **M** x **FFC** (**i**, **n**)

R =200.000,00 x FFC (2%, 24)

Na tabela correspondente a 2%, na coluna **FFC**, e na linha **n** = 24, vamos encontrar o coeficiente 0,03287, assim temos:

R = 200.000,00 x 0,03287 = 6574,00

HP12C = 200.000 CHS FV 2 i 24 n PMT = 6574,00.

Pela fórmula temos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} \times \frac{\mathbf{i}}{(1+\mathbf{i})^{n}-1}$$

$$\mathbf{R} = 200.000{,}00 \times \frac{0{,}02}{(1{,}02)^{24}-1}$$

R = 200.000,00 x 0,03287 = 1.754,00

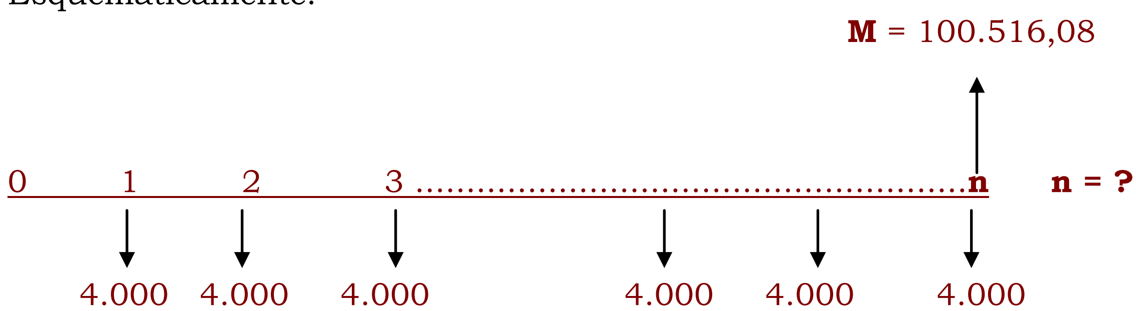
Como os nossos problemas de montante apresentam sempre 4 variáveis, das quais 3 são dadas, somente poderão surgir as seguintes situações:

a) Dados R, i, n, achar S (já visto (FAC))
b) Dados S, i, n, achar R (já visto (FFC))
c) Dados R, S, i, achar n
d) Dados R, S, n, achar i.

Vejamos exemplos da aplicação dos itens c e d

Quantas prestações de R$ 4.000,00 devo aplicar trimestralmente, à taxa de 7% ao trimestre, para acumular um montante de R$ 100.516,08 no final de certo prazo? E qual esse prazo?

Esquematicamente:



Dados:

R = 4.000,00 por trimestre
M = 100.516,08
i = 7% ao trimestre
n = ?

Observação: Como a unidade de tempo está coerente com a taxa, não é necessária nenhuma conversão.
Solução: Para solução deste problema, podemos usar qualquer das duas fórmulas conhecidas:

M = **R** x **FAC** (**i**, **n**) ou **R** = **M** x **FFC** (**i**, **n**)

a) Solução com a utilização da primeira fórmula:

M = **R** x **FAC** (**i**, **n**)
100.516,08 = 4.000,00 x **FAC**(7%, **n**)
FAC(7%, **n**) = 100.516,08/4.000,00
FAC(7%,**n**) = 25,12902

Pesquisando na tabela correspondente à taxa 7%, na coluna FAC, vamos encontrar o valor 25,12902 exatamente na linha **n** = 15. Portanto, a resposta para o problema é a seguinte: são necessárias 15 prestações trimestrais de R$ 4.000,00 cada uma para obter o valor desejado, que se efetivará no final de 15 trimestres, ou 3 anos e 9 meses.

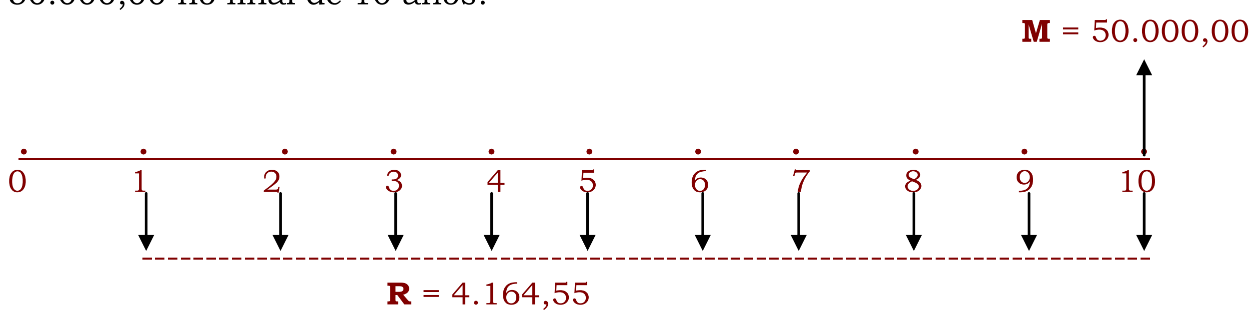
b) Solução com a utilização da fórmula:
R = **M** x **FFC** (**i**, n)
4.000,00 = 100.516,08 x **FFC**(7%, **n**)
FFC(7%, **n**) = 4.000,00/100.516,08
FFC(7%, **n**) = 0,03979

Da mesma forma, pesquisando na tabela 7%, na coluna **FFC**, vamos encontrar o valor 0,03979 na linha **n** = 15.

HP12C = 100.516,08 CHS FV 4.000,00 PMT 7 i n = 15

Problema em que a taxa é a incógnita.

A que taxa devo aplicar R$ 4.164,55 por ano para que eu tenha um montante de R$ 50.000,00 no final de 10 anos?



Dados: **R** = 4.164,55
M = 50.000,00
n = 10 anos ou 10 prestações
i = ? ao ano

Solução: Neste caso, também podemos utilizar uma das duas fórmulas conhecidas. Para utilizarmos apenas uma, ficaremos com a primeira.

M = **R** x **FAC** (**i**, **n**)
50.000,00 = 4.164,55 x FAC (**i**, 10)
FAC (**i**, 10) = 50.000,00/4.164,55
FAC (**i**, 10) = 12,00611

Para que possamos determinar a taxa **i** , teremos que pesquisar na coluna **FAC**, na linha **n** = 10, tabela por tabela, até encontrarmos o valor 12,00611

Encontrando este valor, basta verificar na coluna **FAC i** a taxa correspondente, ou seja, 4% ao ano.

HP12C = 50.000,00 CHS FV 4.164,55 PMT 10 n i = 4% ao ano

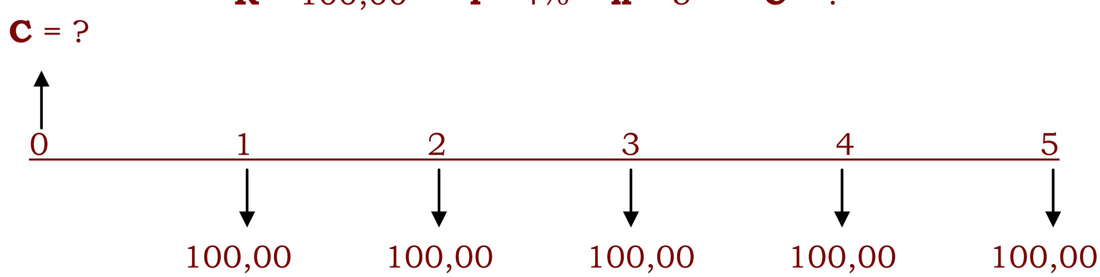
Nota: A solução de todos os problemas apresentados até aqui foi obtida admitindo-se a existência de tabelas financeiras correspondentes a cada caso.

4.2.4 - FATOR DE VALOR ATUAL (FVA)

Da mesma forma que deduzimos o Fator de Acumulação de Capital, vamos deduzir o Fator de Valor Atual para a série de pagamentos iguais ou uniformes.

Exemplo: Qual o valor que, financiado à taxa de 4% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 5 prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 100,00 cada uma?

R = 100,00 **i** = 4% **n** = 5 **C** = ?



A fórmula para cálculo do valor atual é obtida a partir da fórmula do montante, como segue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} \Rightarrow \mathbf{C} = \frac{\mathbf{M}}{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{M} \times \frac{1}{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}}$$

$\mathbf{C_1}$ = 100,00 x $1/(1 + 0{,}04)^1$ = 100,00 X 1/1,04 = **96,15**
$\mathbf{C_2}$ = 100,00 x $1/(1 + 0{,}04)^2$ = 100,00 x 1/1,0816 = **92,46**
$\mathbf{C_3}$ = 100,00 x $1/(1 + 0{,}04)^3$ = 100,00 x 1/1,1249 = **88,90**
$\mathbf{C_4}$ = 100,00 x $1/(1 + 0{,}04)^4$ = 100,00 x 1/1,1699 = **85,48**
$\mathbf{C^5}$ = 100,00 x $1/(1 + 0{,}04)^5$ = 100,00 x 1/1,2167 = **82,19**
$\mathbf{C_t}$ = **96,15** + **92,46** + **88,90** + **85,48** + **82,19** = **445,18**

Ou

$C_t = R \times \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$ em que $\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i) \times i}$ é o FATOR DE VALOR ATUAL, representado por **FVA(i, n)**.

Também conhecida pela expressão **P = R x FVA(i, n)**

A partir desta fórmula, a solução do problema pode ser indicada por **C** = 100,00 x **FVA**(4%, 5). A solução é obtida facilmente através da consulta à tabela de 4%, coluna **FVA**, **n** = 5, onde encontraremos o valor 4,45182, portanto **C** = 100,00 x 4,45182 = 445,18.

OBS: O **FVA** poderia ser calculado facilmente a partir do **FAC**, bastando multiplicar o **FAC** pelo **FVA** simples $1/(1 + i)^n$, como podemos verificar:

$$FVA(i, n) = FAC(i, n) \times \frac{1}{(1+i)^n}$$

C = 100,00 x **FAC(i, n)** x $1/(1 + 0{,}04)^5$
C = 100,00 x5,41632 x 0,82193
P = 445,18

HP12C = 100,00 CHS PMT 4 i 5 n PV = 445,18

4.2.5 - FATOR DE RECUPERAÇÃO DE CAPITAL (FRC)

É deduzido da fórmula anterior, como segue:

$$C = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$R = \frac{C}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}} \Rightarrow R = C \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

em que $\dfrac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$ é chamado Fator de Recuperação de Capital (**FRC**), que representaremos por **FRC(i, n)**, cuja expressão é assim escrita **R** = **C** x **FRC (i, n)**.

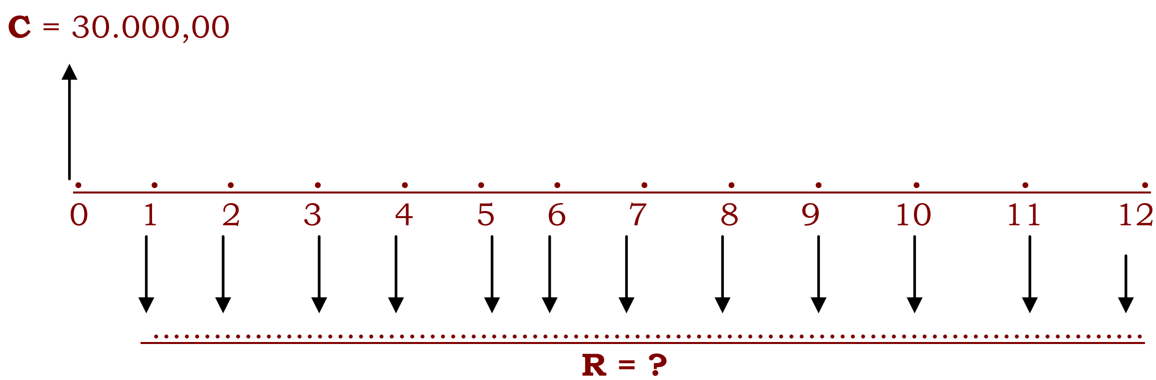
FFC é o inverso do **FAC** e **FRC** é o inverso de **FVA**, ou seja:

$$FFC = \frac{1}{FAC} \quad e \quad FRC = \frac{1}{FVA}$$

Na realidade, o **FRC** é o fator mais utilizado na prática.

Exemplo:

Um empréstimo de R$ 30.000,00 é concedido por uma instituição financeira para ser liquidado em 12 prestações iguais mensais e consecutivas. Sabendo-se que a taxa de juros é 3% ao mês, calcular o valor de cada prestação?



Dados:

C = 30.000,00
n = 12 prestações ou 12 meses
i = 3% ao mês
R = ?

Solução:

R = **C** x **FRC (i, n)**
R = 30.000,00 x **FRC**(3%, 12)

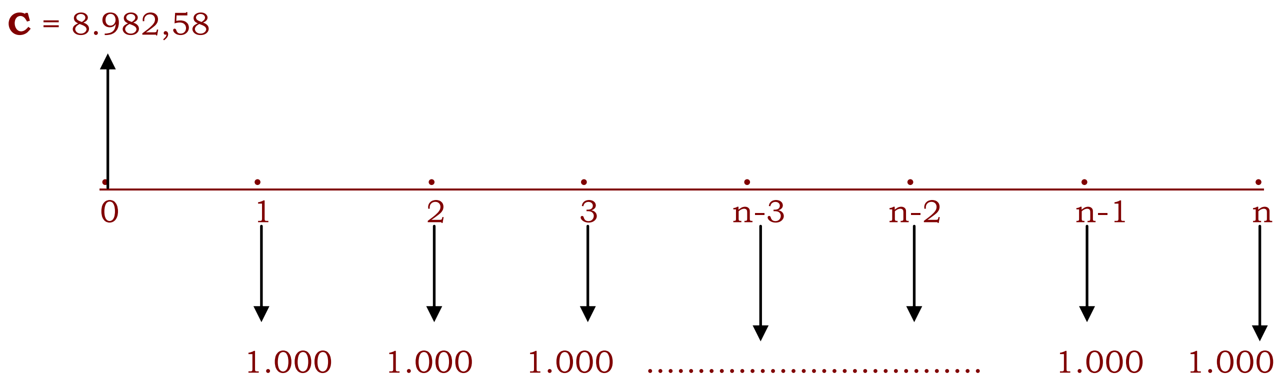
Na tabela correspondente a 3%, coluna **FRC** e linha **n** = 12, vamos encontrar o nº 0,10046. Portanto:

R = 30.000,00 x 0,10046
R = 3.103,80

HP12C = 30.000,00 CHS PV 3% i 12 n PMT = 3.103,80

Exemplo de um problema em que "**n**" não é conhecido.

- Calcular o nº de prestações semestrais, de R$ 1.000,00 cada uma, capaz de liquidar um financiamento de R$ 8.982,58, à taxa de 2% ao semestre.



Dados : **R** = 1.000,00
C = 8.982,58
i = 2% ao semestre
n = ?

Podemos utilizar a fórmula **C** = R x FVA (i, n) ou R = **C** x FRC(i, n)
C = **R** x FVA (i, n)
8.982,58 = 1.000,00 x FVA (2%, n)
FVA (2%, n) = 8.982,58 / 1000,00 = 8,98258
n = 10

HP12C = 8.982,58 CHS PV 1.000,00 PMT 2 i n = 10

Consultando a tabela de 2%, na coluna FVA, vamos encontrar o n° 8,98258 exatamente na linha correspondente a n = 10. Portanto, o financiamento em questão pode ser quitado em 10 prestações semestrais de R$ 1.000,00 cada uma.

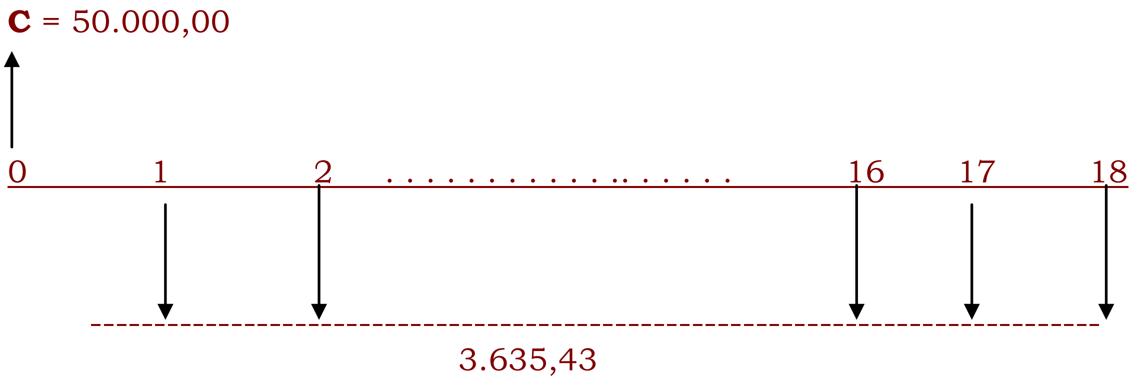
R = **C** x FRC (i, n)
1.000,00 = 8.982,58 x FRC(2%, n)
FRC(2%, n) = 1.000,00/8.982,58
FRC(2%, n) = 0,11133
n = 10 semestres.

HP12C = 1.000,00 CHS PMT 2 i 8.982,58 PV n = 10

Consultando a tabela de 2%, na coluna FRC, vamos encontrar o n° 0,11133 exatamente na linha correspondente a n = 10. Portanto, o financiamento em questão pode ser quitado em 10 prestações semestrais de R$ 1.000,00 cada uma.

Exemplo de um problema em que “i” não é conhecido.

- Determinar a que taxa anual foi firmada a operação de empréstimo de R$ 50.000,00, para ser liquidada em 18 prestações mensais, iguais e consecutivas de R$ 3.635,43 cada uma?



Dados: **R** = 3.635,43
C = 50.000,00
n = 18 prestações
i = ? ao ano

Solução:
C = R x FVA(i, n)
50.000,00 = 3.635,43 FVA(i, 18)
FVA(i, 18) = 50.000,00 / 3.635,53 = 13,75351

Na tabela FVA corresponde a 3% ao mês ou $(1{,}03)^{12}$ = 42,5761% ao ano.

HP12C = 50.000,00 CHS PV 3.635,43 PMT 18 n i 100 : 1 + 12 y^x 1 – 100 X = 42,5761% ao ano

4.3 - SÉRIES DE PAGAMENTOS IGUAIS, COM TERMOS ANTECIPADOS

Nas séries de pagamentos com termos antecipados os pagamentos ou recebimentos ocorrem no início de cada período unitário. Assim, a primeira prestação é sempre paga ou recebida no momento “zero”, ou seja, na data do contrato de empréstimo, do financiamento ou qualquer outra operação que implique pagamento ou recebimento de prestações.

Todos os problemas de séries de pagamentos antecipados poderão ser resolvidos a partir de fatores tabelados para a série de pagamentos com termos vencidos (ou postecipados), bastando multiplicá-lo ou dividi-lo por (1 + i). Na calculadora HP12c utilizaremos a função **begin (g beg).**

Problemas que envolvem fatores de acumulação de capital (**FAC**) e de formação de capital (**FFC**).

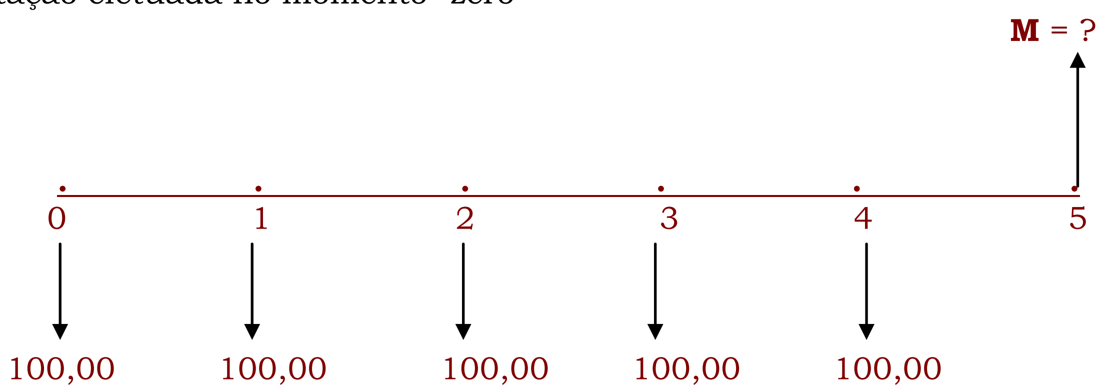
Exemplo:

Qual o montante, no final do 5º mês, resultante da aplicação de 5 prestações iguais, mensais e consecutivas de R$ 100,00, à taxa de 4% ao mês, sabendo-se que a primeira aplicação é feita hoje (data do contrato).

Dados:

R = 100,00
i = 4% ao mês
n = 5 meses
M = ?

1ª prestação efetuada no momento "zero"



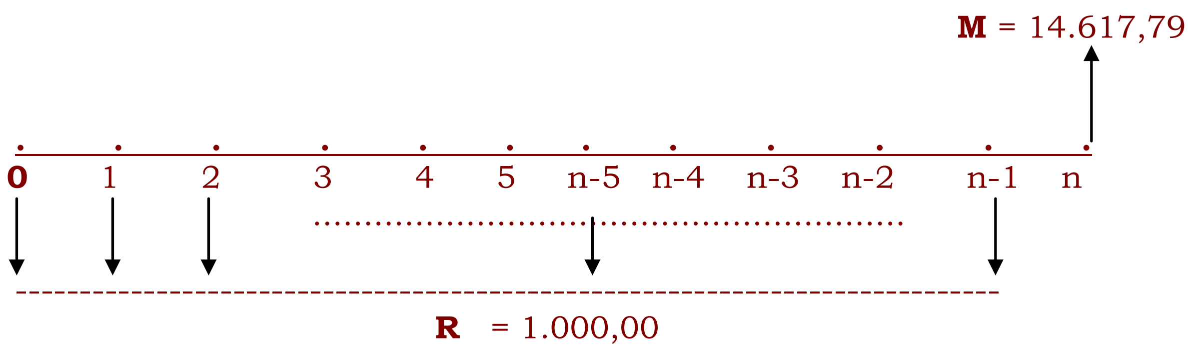
Solução:

M = **R** x (1 + i) x FAC(i, n)
M = 100,00 x 1,04 x FAC(4%, 5)
M = 100,00 x 1,04 x 5,41632
M = 563,30

HP12C= g beg 100 CHS PMT 4 i 5 n FV = 563,30

"**n**" não é conhecido:

Quantas aplicações mensais de R$ 1.000,00 são necessárias para a obtenção de um montante de R$ 14.617,79? Sabendo-se que a taxa é de 3% ao mês, e a primeira aplicação é feita hoje (data do contrato).



Dados:

R = 1.000,00
M = 14.617,79
i = 3% ao mês
n = ?

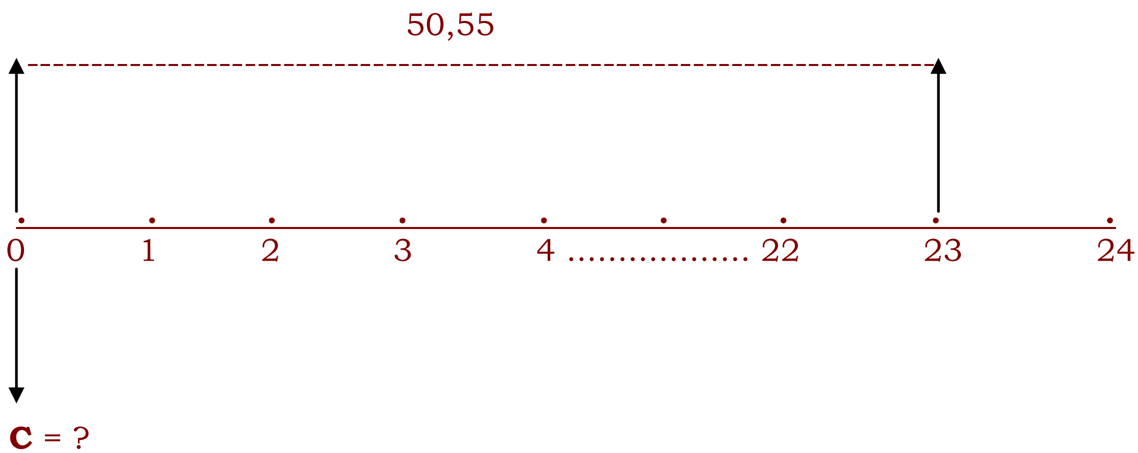
M = **R** x (1 + i) x FAC (i, n)

14.617,79 = 1.000,00 x (1 + 0,03) x FAC(3%, n)
14.617,79 = 1.030,00 x FAC(3%, n)
FAC(3%, n) = 14.617,79/1.030,00
FAC(3%, n) = 14,19203
Na tabela **FAC** corresponde a 12 meses.
Portanto **n**= 12.

HP12C = g beg 14.617,79 CHS FV 3 i 1.000,00 PMT n = 12

Problemas que envolvem fatores de valor atual (**FVA**) e de recuperação de capital (**FRC**).

Determinar o valor de um telefone financiado pela TELEFONICA em 24 prestações iguais de R$ 50,55, sabendo-se que a taxa de juros é de 3% ao mês e que a primeira prestação é paga no ato da contratação.

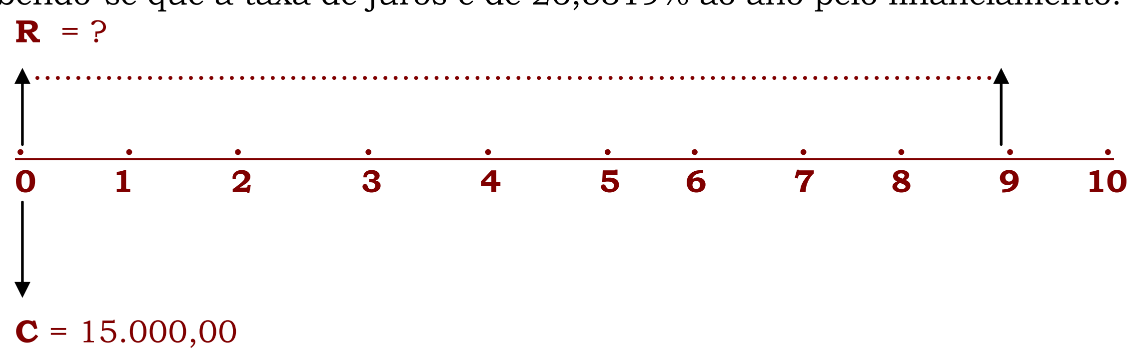


R = 50,55 **n** =24 **i** = 3% ao mês **C** = ?

C = **R** x (1 + **i**) x FVA(i, n)
C = 50,55 x (1 + 0,03) x FVA(3%, 24)
C = 50,55 x 1,03 x 16,93554
C = 881,77

HP12C = g beg 50,55 CHS PMT 3 i 24 n PV = 840,16

"**R**" não é conhecido:
Um terreno é colocado a venda por R$ 15.000,00 à vista ou em 10 prestações bimestrais, sendo a primeira prestação paga no ato do contrato. Determinar o valor de cada parcela, sabendo-se que a taxa de juros é de 26,5319% ao ano pelo financiamento.



C = 15.000,00 *i* = 26,5319% ao ano **n** = 10 prestações **b**

$\mathbf{i_b} = (1{,}265319)^{1}/_{6} = 4\%$ ao bimestre

$$\mathbf{R} = P \times \frac{FRC(i\,,\,n)}{(1 + i)}$$

$$\mathbf{R} = 15.000{,}00 \times \frac{FRC(4\%,\ 10)}{(1 + 0{,}04)}$$

R = 15.000,00 x 0,12329)/ 1,04

R = 15.000,00 x 0,118548

R = 1.776,23

HP12C = g beg 15.000,00 PV 10 n 4 i PMT = 1.778,23

EXERCICIOS PROPOSTOS

1. Calcular o montante, no final de 2 anos, correspondente à aplicação de 24 parcelas iguais e mensais de R$ 200,00 cada uma, dentro do conceito de termos vencidos, sabendo-se que a taxa de juros é de 2% ao mês?
   R = 6.084,37
2. Sabendo-se que um empréstimo pode ser liquidado em 12 parcelas mensais de R$ 2.500,00 cada uma, e que a taxa cobrada pela instituição financeira é de 4,75% ao mês, calcular o valor liquido a ser entregue creditado ao financiado?
   - de acordo com o conceito de termos vencidos
   - de acordo com o conceito de termos antecipados

   R = a)R$ 22.473,89
   b)R$ 23.541,40
3. Determinar a que taxa de juros a aplicação de R$ 5.000,00 por mês gera um montante de R$ 800.000,00 no final de 4 anos e meio, sabendo-se que a primeira parcela é aplicada no final do 1° mês?
   R = 3,604% ao mês.
4. Um veículo "zero" foi adquirido por R$ 25.000,00, sendo 70% financiados em 12 parcelas iguais. Sabendo-se que a financeira cobra uma taxa de 4,5% ao mês, calcular o valor da prestação mensal?
   R = 1.919,16
5. Uma TV, no valor de 750,00, é financiada por uma loja, para pagamento em 13 parcelas iguais de 64,79, sendo a primeira paga no ato de compra. Calcular a taxa de juros cobrada pela loja.
   R = 2%
6. Uma pessoa resolve aplicar R$ 1.000,00 por mês num fundo de renda fixa, à taxa de 3% ao mês. Durante 18 meses. Como essa pessoa recebe gratificações semestrais, deverá, no final do 6° e do 12° mês, fazer aplicações extras de R$ 5.000,00 cada uma. Qual o valor do montante global no final do 18° mês, de acordo com o conceito de termos antecipados?
   R = 37.215,93
7. Quanto terei ao final de 18 meses se aplicar R$ 200,00 a cada bimestre, à taxa de 2,4695% ao mês, sendo a primeira aplicação a 60 dias de hoje?
   R = R$ 2.205,31
8. Uma loja financia um automóvel, para ser pago em 20 prestações, iguais de 570,00. Sabendo-se que a taxa cobrada é de 3% ao mês, determinar o valor financiado pelo conceito de termos vencidos e antecipados?
   R = a) 8.480,16 b) 8.734,57

5 - SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Os três sistemas de amortização mais utilizados no Brasil são:

- **Sistema Francês (Tabela Price)**
- **Sistema de Amortização Constante (SAC)**
- **Sistema de Amortização Misto (SAM)**

O primeiro é largamente utilizado em todos os setores financeiros e de capitais, enquanto que os dois últimos são mais utilizados pelo Sistema Financeiro de Habitação, principalmente nas operações de financiamento para aquisição de casa própria.

5.1 - SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO (TABELA PRICE)

O sistema francês consiste em um plano de amortização de uma divida em prestações periódicas, iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação, ou pagamento, é composto por duas parcelas distintas: **uma de juros e outra de capital (chamada amortização)**. Não implica necessariamente em prestações mensais, como geralmente se entende, mas podem ser também, bimestrais, trimestrais, semestrais ou anuais; basta que sejam iguais, periódicas, sucessivas e de termos vencidos, podendo ser definida para qualquer taxa.

O valor das prestações é determinado com base na mesma fórmula utilizada para séries de pagamentos com termos vencidos ou postecipados, isto é:

$$\mathbf{R = C \times FRC\ (i,\ n)}$$

A parcela de juros é obtida multiplicando-se a taxa de juros pelo saldo devedor existente no período imediatamente anterior; a parcela de amortização é determinada pela diferença entre o valor da prestação e o valor da parcela de juros.

Exemplo:

1. Calcular os valores das parcelas de juros e amortizações referentes à primeira prestação de um empréstimo de R$ 8.530,20 `a taxa de juros de 3% ao mês, para ser liquidado em 10 prestações iguais.

   a) valor da prestação

   $\mathbf{R} = \mathbf{C} \times \mathbf{FRC}\ (i, n) = 8.530{,}20 \times \mathbf{FRC}(3\%, 10)$

   $\mathbf{R} = 8.530{,}20 \times 0{,}11723 = 1.000{,}00$

   Ou pela fórmula

   $$\mathbf{R} = \mathbf{C} \times \frac{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} \times \mathbf{i}}{(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} - 1}$$

   $$\mathbf{R} = 8.530{,}20 \times \frac{(1 + 0{,}03)^{10} \times 0{,}03}{(1 + 0{,}03)^{10} - 1}$$

R = 8.530,20 x 0,040317/0,343916
R = 8.530,20 x 0,11723 = 1.000,00

b) valor da parcela de juros
J = **i** x **C** = 0,03 x 8.530,20 = 255,91
c) valor da parcela de amortização (A)
A = **R** – **J** = 1.000,00 – 255,91 = 744,09.

Plano de pagamento do empréstimo – Sistema Francês.

t	S devedor (P_t)	Amortização (A)	Juros (J_t)	Prestação (R)
0	8.530,20	-	-	-
1	7.786,11	744,09	255,91	1.000,00
2	7.019,69	766,42	233,58	1.000,00
3	6.230,28	789,41	210,59	1.000,00
4	5.417,19	813,09	186,21	1.000,00
5	4.579,71	837,48	162,52	1.000,00
6	3717,10	862,61	137,39	1.000,00
7	2.828,61	888,49	111,51	1.000,00
8	1.913,47	915,14	84,86	1.000,00
9	970,87	942,60	57,40	1.000,00
10	0,00	970,87	29,13	1.000,00
TOTAL		**8.530,20**	**1.469,80**	**10.000,00**

HP-12C

8.530,20 **CHS PV** 10 **n** 3 **i PMT**
0 **n**
1 **f AMORT** = juros 1ª prestação
x >< **y** = saldo devedor após 1º pagamento
RCL PV = saldo devedor após pagamento 1ª prestação.
E assim sucessivamente até a última prestação.

Calcular o saldo devedor existente no final do 6º mês (após o pagamento da 6ª prestação:

f CLEAR REG 8.530,20 **CHS PV** 10 **n** 3 **i PMT** 10 **ENTER** 6 **– n PV = (3.717,10)**

Calcular o valor da parcela de juros correspondente à 4ª prestação:

f CLEAR REG 1.000 **CHS PMT** 3 **i** 7 **n PV RCL i %**

Calcular o valor da parcela de amortização correspondente à 5ª prestação:

f CLEAR REG 8.530,20 **ENTER** 3 **%** 1.000,00 **– CHS** 1,03 **ENTER** 4 **y^x X**

Calcular o valor das amortizações acumuladas até o 4º mês, ou seja, a soma das parcelas correspondentes às quatro primeiras prestações:

f CLEAR REG 1.000 **CHS PMT** 3 **i** 10 **n PV** 6 **n PV -**

Calcular os juros acumulados até a 4ª prestação:
4 **ENTER** 1.000 **X** 3.113,01 **-**

Calcular o valor dos juros acumulados entre o 6º e o 9º mês, ou seja, entre a 6ª prestação (exclusive) e a 9ª prestação (inclusive).

F CLEAR REG 1.000 **CHS PMT** 3 **i** 4 **n PV** 1 **n PV –** 1.000 **ENTER** 3 **X - CHS**

5.2 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Este sistema é extremamente simples e sua denominação deriva da sua principal característica, ou seja, as amortizações periódicas são todas iguais ou constantes, enquanto que no sistema Francês, as amortizações crescem exponencialmente à medida que o prazo aumenta.

É amplamente utilizado pelo Sistema Financeiro da Habitação, nas operações de financiamento da casa própria.

SAC consiste em um plano de amortização de uma divida em prestações periódicas, sucessivas e decrescentes em que o valor da prestação é composto por uma parcela de juros e outra parcela de capital (amortização).

A parcela de capital é obtida dividindo-se o valor do empréstimo pelo nº de prestações, enquanto que o valor da parcela de juros é determinado multiplicando-se a taxa de juros pelo saldo devedor existente no período anterior.

Exemplo:

Elaborar um plano de pagamentos, com base no Sistema de Amortização Constante, correspondente a um empréstimo de R$ 100.000,00, à taxa de 3% ao mês, a ser liquidado em 10 parcelas mensais.

A = $\mathbf{C_o}$/**n** = 100.000,00 / 10 = 10.000,00
1ª prestação = 10.000,00 + 0,03 x 100.000,00 = 13.000,00
2ª prestação = 10.000,00 + 0,03 x 90.000,00 = 12.700,00
. . . .
10 ª prestação = 10.000,00 + 0,03 x 10.000,00 = 10.300,00

Plano de pagamento do empréstimo – SAC.

t	Saldo	Amortização	Juros	Parcela
0	100.000,00	0,00	0,00	0,00
1	90.000,00	10.000,00	3.000,00	13.000,00
2	80.000,00	10.000,00	2.700,00	12.700,00
3	70.000,00	10.000,00	2.400,00	12.400,00
4	60.000,00	10.000,00	2.100,00	12.100,00
5	50.000,00	10.000,00	1.800,00	11.800,00
6	40.000,00	10.000,00	1.500,00	11.500,00
7	30.000,00	10.000,00	1.200,00	11.200,00
8	20.000,00	10.000,00	900,00	10.900,00
9	10.000,00	10.000,00	600,00	10.600,00
10	0,00	10.000,00	300,00	10.300,00
TOTAL		**100.000,00**	**16.500,00**	**116.500,00**

5.3 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

Este sistema foi criado pelo BNH em maio de 1.979, e constitui num misto entre o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price) e o Sistema de Amortização Constante, originando-se daí a sua denominação. O SAM é um plano de pagamentos composto por prestações cujos valores são resultantes da média aritmética dos valores das prestações dos planos SAC e PRICE, correspondentes aos respectivos prazos; os valores das parcelas de amortização e juros resultam da mesma regra.

Exemplo:

Elaborar um plano de pagamentos com base no sistema de Amortização Misto, correspondente a um empréstimo de R$ 12.000,00, a uma taxa de 2% ao mês a ser liquidado em 12 prestações mensais.

Solução:

Para se obter os valores do plano solicitado, temos primeiramente de determinar os correspondentes valores para os planos definidos pelos Sistemas SAC e PRICE, e a seguir calcular as suas respectivas médias aritméticas.

Sistema Francês – Tabela Price

t	saldo	Amortização	juros	Parcela
0	12.000,00	0,00	0,00	0,00
1	11.105,28	894,72	240,00	1.134,72
2	10.192,68	912,61	222,11	1.134,72
3	9.261,81	930,86	203,85	1.134,72
4	8.312,33	949,48	185,24	1.134,72
5	7.343,87	968,47	166,25	1.134,72
6	6.356,03	987,84	146,88	1.134,72
7	5.348,43	1.007,59	127,12	1.134,72
8	4.320,69	1.027,75	106,97	1.134,72
9	3.272,39	1.048,30	86,41	1.134,72
10	2.203,12	1.069,27	65,45	1.134,72
11	1.112,47	1.090,65	44,06	1.134,72
12	0,00	1.112,47	22,25	1.134,72
Total		**12.000,00**	**1.616,58**	**13.616,58**

Sistema Amortização Constante - SAC

t	saldo	Amortização	juros	Parcela
0	12.000,00	0,00	0,00	0,00
1	11.000,00	1.000,00	240,00	1.240,00
2	10.000,00	1.000,00	220,00	1.220,00
3	9.000,00	1.000,00	200,00	1.200,00
4	8.000,00	1.000,00	180,00	1.180,00
5	7.000,00	1.000,00	160,00	1.160,00
6	6.000,00	1.000,00	140,00	1.140,00
7	5.000,00	1.000,00	120,00	1.120,00
8	4.000,00	1.000,00	100,00	1.100,00
9	3.000,00	1.000,00	80,00	1.080,00
10	2.000,00	1.000,00	60,00	1.060,00
11	1.000,00	1.000,00	40,00	1.040,00
12	0,00	1.000,00	20,00	1.020,00
Total		**12.000,00**	**1.560,00**	**13.560,00**

Sistema Amortização Misto - SAM

t	saldo	Amortização	Juros	Parcela
0	12.000,00	0,00	0,00	0,00
1	11.052,64	947,36	240,00	1.187,36
2	10.096,34	956,30	221,05	1.177,36
3	9.130,91	965,43	201,93	1.167,36
4	8.156,17	974,74	182,62	1.157,36
5	7.171,93	984,23	163,12	1.147,36
6	6.178,01	993,92	143,44	1.137,36
7	5.174,22	1.003,80	123,56	1.127,36
8	4.160,34	1.013,87	103,48	1.117,36
9	3.136,19	1.024,15	83,21	1.107,36
10	2.101,56	1.034,63	62,72	1.097,36
11	1.056,23	1.045,33	42,03	1.087,36
12	0,00	1.056,23	21,12	1.077,36
Total		**12.000,00**	**1.588,29**	**13.588,29**

EXERCICIOS PROPOSTOS

1. Um empréstimo de R$ 1.000,00 será pago pelo Sistema de Amortização Francês em 4 prestações mensais, sem entrada. Se a taxa de juros for de 10% ao mês, calcular o valor das prestações e construir a planilha de amortização.

2. Um eletrodoméstico que custa R$ 800,00 está sendo vendido em 5 prestações mensais, iguais e sem entrada. À taxa de juros de 4% ao mês, calcular o valor das prestações e construir a planilha de amortização.

3. Se uma dívida está sendo amortizada pelo sistema Price em 6 prestações de R$ 78,81, à taxa de 5% ao mês, qual o seu valor inicial?

4. Um empréstimo de R$ 1.000,00 será pago em 4 prestações mensais pelo sistema de amortização constante, sendo a primeira delas paga 1 mês após a sua aquisição. À taxa de 10% ao mês, construir a planilha de amortização.

5. Uma dívida de R$ 500,00, amortizada pelo SAC, em 10 vezes sem entrada, à taxa de 2% ao mês, produz que valor como quarta prestação? Qual o saldo devedor após o pagamento da sexta prestação?

6. Na amortização pelo SAC, de R$ 2.000,00 em 10 vezes, à taxa de 8% ao mês, qual o total de juros pagos durante o financiamento?

6 – TABELAS FINANCEIRAS

6.1 – PAGAMENTO ÚNICO – FATOR ACUMULAÇÃO CAPITAL – FAC

FORMULA = $(1 + i)^n$

i = taxa
n = prazo

I N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000	1,09000
2	1,02010	1,04040	1,06090	1,08160	1,10250	1,12360	1,14490	1,16640	1,18810
3	1,03030	1,06121	1,09273	1,12486	1,15763	1,19102	1,22504	1,25971	1,29503
4	1,04060	1,08243	1,12551	1,16986	1,21551	1,26248	1,31080	1,36049	1,41158
5	1,05101	1,10408	1,15927	1,21665	1,27628	1,33823	1,40255	1,46933	1,53862
6	1,06152	1,12616	1,19405	1,26532	1,34010	1,41852	1,50073	1,58687	1,67710
7	1,07214	1,14869	1,22987	1,31593	1,40710	1,50363	1,60578	1,71382	1,82804
8	1,08286	1,17166	1,26677	1,36857	1,47746	1,59385	1,71819	1,85093	1,99256
9	1,09369	1,19509	1,30477	1,42331	1,55133	1,68948	1,83846	1,99900	2,17189
10	1,10462	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889	1,79085	1,96715	2,15892	2,36736
11	1,11567	1,24337	1,38423	1,53945	1,71034	1,89830	2,10485	2,33164	2,58043
12	1,12683	1,26824	1,42576	1,60103	1,79586	2,01220	2,25219	2,51817	2,81266
13	1,13809	1,29361	1,46853	1,66507	1,88565	2,13293	2,40985	2,71962	3,06580
14	1,14947	1,31948	1,51259	1,73168	1,97993	2,26090	2,57853	2,93719	3,34173
15	1,16097	1,34587	1,55797	1,80094	2,07893	2,39656	2,75903	3,17217	3,64248
16	1,17258	1,37279	1,60471	1,87298	2,18287	2,54035	2,95216	3,42594	3,97031
17	1,18430	1,40024	1,65285	1,94790	2,29202	2,69277	3,15882	3,70002	4,32763
18	1,19615	1,42825	1,70243	2,02582	2,40662	2,85434	3,37993	3,99602	4,71712
19	1,20811	1,45681	1,75351	2,10685	2,52695	3,02560	3,61653	4,31570	5,14166
20	1,22019	1,48595	1,80611	2,19112	2,65330	3,20714	3,86968	4,66096	5,60441
21	1,23239	1,51567	1,86029	2,27877	2,78596	3,39956	4,14056	5,03383	6,10881
22	1,24472	1,54598	1,91610	2,36992	2,92526	3,60354	4,43040	5,43654	6,65860
23	1,25716	1,57690	1,97359	2,46472	3,07152	3,81975	4,74053	5,87146	7,25787
24	1,26973	1,60844	2,03279	2,56330	3,22510	4,04893	5,07237	6,34118	7,91108

Exemplo:
R$ 100,00 para pagamento no 24 mês de uma única vez à taxa de 5% ao mês **(100 X 3,22510 = 322,51)**
HP12C = 100,00 **CHS PV** 5 **i** 24 **n FV**

6.2 – PAGAMENTO ÚNICO – FATOR VALOR ATUAL – FVA

FORMULA $\dfrac{1}{(1+i)^n}$

I N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	0,99010	0,98039	0,97087	0,96154	0,95238	0,94340	0,93458	0,92593	0,91743
2	0,98030	0,96117	0,94260	0,92456	0,90703	0,89000	0,87344	0,85734	0,84168
3	0,97059	0,94232	0,91514	0,88900	0,86384	0,83962	0,81630	0,79383	0,77218
4	0,96098	0,92385	0,88849	0,85480	0,82270	0,79209	0,76290	0,73503	0,70843
5	0,95147	0,90573	0,86261	0,82193	0,78353	0,74726	0,71299	0,68058	0,64993
6	0,94205	0,88797	0,83748	0,79031	0,74622	0,70496	0,66634	0,63017	0,59627
7	0,93272	0,87056	0,81309	0,75992	0,71068	0,66506	0,62275	0,58349	0,54703
8	0,92348	0,85349	0,78941	0,73069	0,67684	0,62741	0,58201	0,54027	0,50187
9	0,91434	0,83676	0,76642	0,70259	0,64461	0,59190	0,54393	0,50025	0,46043
10	0,90529	0,82035	0,74409	0,67556	0,61391	0,55839	0,50835	0,46319	0,42241
11	0,89632	0,80426	0,72242	0,64958	0,58468	0,52679	0,47509	0,42888	0,38753
12	0,88745	0,78849	0,70138	0,62460	0,55684	0,49697	0,44401	0,39711	0,35553
13	0,87866	0,77303	0,68095	0,60057	0,53032	0,46884	0,41496	0,36770	0,32618
14	0,86996	0,75788	0,66112	0,57748	0,50507	0,44230	0,38782	0,34046	0,29925
15	0,86135	0,74301	0,64186	0,55526	0,48102	0,41727	0,36245	0,31524	0,27454
16	0,85282	0,72845	0,62317	0,53391	0,45811	0,39365	0,33873	0,29189	0,25187
17	0,84438	0,71416	0,60502	0,51337	0,43630	0,37136	0,31657	0,27027	0,23107
18	0,83602	0,70016	0,58739	0,49363	0,41552	0,35034	0,29586	0,25025	0,21199
19	0,82774	0,68643	0,57029	0,47464	0,39573	0,33051	0,27651	0,23171	0,19449
20	0,81954	0,67297	0,55368	0,45639	0,37689	0,31180	0,25842	0,21455	0,17843
21	0,81143	0,65978	0,53755	0,43883	0,35894	0,29416	0,24151	0,19866	0,16370
22	0,80340	0,64684	0,52189	0,42196	0,34185	0,27751	0,22571	0,18394	0,15018
23	0,79544	0,63416	0,50669	0,40573	0,32557	0,26180	0,21095	0,17032	0,13778
24	0,78757	0,62172	0,49193	0,39012	0,31007	0,24698	0,19715	0,15770	0,12640

Exemplo:
Qual é o valor que deverá ser emprestado hoje para pagamento no 24 mês à taxa de 3% ao mês **(100 X 0,49193 = 49,19**
HP12C = 100,00 **CHS FV** 3 **i** 24 **n PV**

6.3 – SERIE DE PAGAMENTO IGUAIS – FATOR ACUMULAÇÃO CAPITAL – FAC

FORMULA $\dfrac{(1 + i)^n - 1}{i}$

I N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	2,01000	2,02000	2,03000	2,04000	2,05000	2,06000	2,07000	2,08000	2,09000
3	3,03010	3,06040	3,09090	3,12160	3,15250	3,18360	3,21490	3,24640	3,27810
4	4,06040	4,12161	4,18363	4,24646	4,31013	4,37462	4,43994	4,50611	4,57313
5	5,10101	5,20404	5,30914	5,41632	5,52563	5,63709	5,75074	5,86660	5,98471
6	6,15202	6,30812	6,46841	6,63298	6,80191	6,97532	7,15329	7,33593	7,52333
7	7,21354	7,43428	7,66246	7,89829	8,14201	8,39384	8,65402	8,92280	9,20043
8	8,28567	8,58297	8,89234	9,21423	9,54911	9,89747	10,25980	10,63663	11,02847
9	9,36853	9,75463	10,15911	10,58280	11,02656	11,49132	11,97799	12,48756	13,02104
10	10,46221	10,94972	11,46388	12,00611	12,57789	13,18079	13,81645	14,48656	15,19293
11	11,56683	12,16872	12,80780	13,48635	14,20679	14,97164	15,78360	16,64549	17,56029
12	12,68250	13,41209	14,19203	15,02581	15,91713	16,86994	17,88845	18,97713	20,14072
13	13,80933	14,68033	15,61779	16,62684	17,71298	18,88214	20,14064	21,49530	22,95338
14	14,94742	15,97394	17,08632	18,29191	19,59863	21,01507	22,55049	24,21492	26,01919
15	16,09690	17,29342	18,59891	20,02359	21,57856	23,27597	25,12902	27,15211	29,36092
16	17,25786	18,63929	20,15688	21,82453	23,65749	25,67253	27,88805	30,32428	33,00340
17	18,43044	20,01207	21,76159	23,69751	25,84037	28,21288	30,84022	33,75023	36,97370
18	19,61475	21,41231	23,41444	25,64541	28,13238	30,90565	33,99903	37,45024	41,30134
19	20,81090	22,84056	25,11687	27,67123	30,53900	33,75999	37,37896	41,44626	46,01846
20	22,01900	24,29737	26,87037	29,77808	33,06595	36,78559	40,99549	45,76196	51,16012
21	23,23919	25,78332	28,67649	31,96920	35,71925	39,99273	44,86518	50,42292	56,76453
22	24,47159	27,29898	30,53678	34,24797	38,50521	43,39229	49,00574	55,45676	62,87334
23	25,71630	28,84496	32,45288	36,61789	41,43048	46,99583	53,43614	60,89330	69,53194
24	26,97346	30,42186	34,42647	39,08260	44,50200	50,81558	58,17667	66,76476	76,78981

Exemplo:
Qual é o valor no 24 mês, referente a uma aplicação de R$ 100,00 por mês à taxa de 3% ao mês **(100 X 34,42647 = 3.442,65**
HP12C = 100,00 **CHS PMT** 3 **i** 24 **n FV**

6.4 – SERIE DE PAGAMENTO IGUAIS – FATOR FORMAÇÃO CAPITAL – FFC

FORMULA $= \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

I N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,49751	0,49505	0,49261	0,49020	0,48780	0,48544	0,48309	0,48077	0,47847
3	0,33002	0,32675	0,32353	0,32035	0,31721	0,31411	0,31105	0,30803	0,30505
4	0,24628	0,24262	0,23903	0,23549	0,23201	0,22859	0,22523	0,22192	0,21867
5	0,19604	0,19216	0,18835	0,18463	0,18097	0,17740	0,17389	0,17046	0,16709
6	0,16255	0,15853	0,15460	0,15076	0,14702	0,14336	0,13980	0,13632	0,13292
7	0,13863	0,13451	0,13051	0,12661	0,12282	0,11914	0,11555	0,11207	0,10869
8	0,12069	0,11651	0,11246	0,10853	0,10472	0,10104	0,09747	0,09401	0,09067
9	0,10674	0,10252	0,09843	0,09449	0,09069	0,08702	0,08349	0,08008	0,07680
10	0,09558	0,09133	0,08723	0,08329	0,07950	0,07587	0,07238	0,06903	0,06582
11	0,08645	0,08218	0,07808	0,07415	0,07039	0,06679	0,06336	0,06008	0,05695
12	0,07885	0,07456	0,07046	0,06655	0,06283	0,05928	0,05590	0,05270	0,04965
13	0,07241	0,06812	0,06403	0,06014	0,05646	0,05296	0,04965	0,04652	0,04357
14	0,06690	0,06260	0,05853	0,05467	0,05102	0,04758	0,04434	0,04130	0,03843
15	0,06212	0,05783	0,05377	0,04994	0,04634	0,04296	0,03979	0,03683	0,03406
16	0,05794	0,05365	0,04961	0,04582	0,04227	0,03895	0,03586	0,03298	0,03030
17	0,05426	0,04997	0,04595	0,04220	0,03870	0,03544	0,03243	0,02963	0,02705
18	0,05098	0,04670	0,04271	0,03899	0,03555	0,03236	0,02941	0,02670	0,02421
19	0,04805	0,04378	0,03981	0,03614	0,03275	0,02962	0,02675	0,02413	0,02173
20	0,04542	0,04116	0,03722	0,03358	0,03024	0,02718	0,02439	0,02185	0,01955
21	0,04303	0,03878	0,03487	0,03128	0,02800	0,02500	0,02229	0,01983	0,01762
22	0,04086	0,03663	0,03275	0,02920	0,02597	0,02305	0,02041	0,01803	0,01590
23	0,03889	0,03467	0,03081	0,02731	0,02414	0,02128	0,01871	0,01642	0,01438
24	0,03707	0,03287	0,02905	0,02559	0,02247	0,01968	0,01719	0,01498	0,01302

Exemplo:

Quanto deve ser depositado por mês para se obter R$ 2.000,00 no final de 24 mêses à uma taxa de 3% ao mês **(2.000,00 X 0,02905 = 58,10**

HP12C = 58,10 **CHS PMT** 3 **i** 24 **n** **FV**

6.5 – SERIE DE PAGAMENTO IGUAIS – FATOR VALOR ATUAL – FVA

FORMULA $= \dfrac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$

I N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	0,99010	0,98039	0,97087	0,96154	0,95238	0,94340	0,93458	0,92593	0,91743
2	1,97040	1,94156	1,91347	1,88609	1,85941	1,83339	1,80802	1,78326	1,75911
3	2,94099	2,88388	2,82861	2,77509	2,72325	2,67301	2,62432	2,57710	2,53129
4	3,90197	3,80773	3,71710	3,62990	3,54595	3,46511	3,38721	3,31213	3,23972
5	4,85343	4,71346	4,57971	4,45182	4,32948	4,21236	4,10020	3,99271	3,88965
6	5,79548	5,60143	5,41719	5,24214	5,07569	4,91732	4,76654	4,62288	4,48592
7	6,72819	6,47199	6,23028	6,00205	5,78637	5,58238	5,38929	5,20637	5,03295
8	7,65168	7,32548	7,01969	6,73274	6,46321	6,20979	5,97130	5,74664	5,53482
9	8,56602	8,16224	7,78611	7,43533	7,10782	6,80169	6,51523	6,24689	5,99525
10	9,47130	8,98259	8,53020	8,11090	7,72173	7,36009	7,02358	6,71008	6,41766
11	10,36763	9,78685	9,25262	8,76048	8,30641	7,88687	7,49867	7,13896	6,80519
12	11,25508	10,57534	9,95400	9,38507	8,86325	8,38384	7,94269	7,53608	7,16073
13	12,13374	11,34837	10,63496	9,98565	9,39357	8,85268	8,35765	7,90378	7,48690
14	13,00370	12,10625	11,29607	10,56312	9,89864	9,29498	8,74547	8,24424	7,78615
15	13,86505	12,84926	11,93794	11,11839	10,37966	9,71225	9,10791	8,55948	8,06069
16	14,71787	13,57771	12,56110	11,65230	10,83777	10,10590	9,44665	8,85137	8,31256
17	15,56225	14,29187	13,16612	12,16567	11,27407	10,47726	9,76322	9,12164	8,54363
18	16,39827	14,99203	13,75351	12,65930	11,68959	10,82760	10,05909	9,37189	8,75563
19	17,22601	15,67846	14,32380	13,13394	12,08532	11,15812	10,33560	9,60360	8,95011
20	18,04555	16,35143	14,87747	13,59033	12,46221	11,46992	10,59401	9,81815	9,12855
21	18,85698	17,01121	15,41502	14,02916	12,82115	11,76408	10,83553	10,01680	9,29224
22	19,66038	17,65805	15,93692	14,45112	13,16300	12,04158	11,06124	10,20074	9,44243
23	20,45582	18,29220	16,44361	14,85684	13,48857	12,30338	11,27219	10,37106	9,58021
24	21,24339	18,91393	16,93554	15,24696	13,79864	12,55036	11,46933	10,52876	9,70661

Exemplo:

Qual é o valor que, se financiado á taxa de 4% ao mês, pode ser pago em 24 prestações mensais de R$ 100,00 **(100,00 X 15,24696 = 1.524,70**

HP12C = 1.524,70 **CHS PMT** 4 **i** 24 **n PV**

6.6 – SERIE DE PAGAMENTO IGUAIS – FATOR RECUPERAÇÃO CAPITAL – FRC

FORMULA $= \dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

I N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000	1,09000
2	0,50751	0,51505	0,52261	0,53020	0,53780	0,54544	0,55309	0,56077	0,56847
3	0,34002	0,34675	0,35353	0,36035	0,36721	0,37411	0,38105	0,38803	0,39505
4	0,25628	0,26262	0,26903	0,27549	0,28201	0,28859	0,29523	0,30192	0,30867
5	0,20604	0,21216	0,21835	0,22463	0,23097	0,23740	0,24389	0,25046	0,25709
6	0,17255	0,17853	0,18460	0,19076	0,19702	0,20336	0,20980	0,21632	0,22292
7	0,14863	0,15451	0,16051	0,16661	0,17282	0,17914	0,18555	0,19207	0,19869
8	0,13069	0,13651	0,14246	0,14853	0,15472	0,16104	0,16747	0,17401	0,18067
9	0,11674	0,12252	0,12843	0,13449	0,14069	0,14702	0,15349	0,16008	0,16680
10	0,10558	0,11133	0,11723	0,12329	0,12950	0,13587	0,14238	0,14903	0,15582
11	0,09645	0,10218	0,10808	0,11415	0,12039	0,12679	0,13336	0,14008	0,14695
12	0,08885	0,09456	0,10046	0,10655	0,11283	0,11928	0,12590	0,13270	0,13965
13	0,08241	0,08812	0,09403	0,10014	0,10646	0,11296	0,11965	0,12652	0,13357
14	0,07690	0,08260	0,08853	0,09467	0,10102	0,10758	0,11434	0,12130	0,12843
15	0,07212	0,07783	0,08377	0,08994	0,09634	0,10296	0,10979	0,11683	0,12406
16	0,06794	0,07365	0,07961	0,08582	0,09227	0,09895	0,10586	0,11298	0,12030
17	0,06426	0,06997	0,07595	0,08220	0,08870	0,09544	0,10243	0,10963	0,11705
18	0,06098	0,06670	0,07271	0,07899	0,08555	0,09236	0,09941	0,10670	0,11421
19	0,05805	0,06378	0,06981	0,07614	0,08275	0,08962	0,09675	0,10413	0,11173
20	0,05542	0,06116	0,06722	0,07358	0,08024	0,08718	0,09439	0,10185	0,10955
21	0,05303	0,05878	0,06487	0,07128	0,07800	0,08500	0,09229	0,09983	0,10762
22	0,05086	0,05663	0,06275	0,06920	0,07597	0,08305	0,09041	0,09803	0,10590
23	0,04889	0,05467	0,06081	0,06731	0,07414	0,08128	0,08871	0,09642	0,10438
24	0,04707	0,05287	0,05905	0,06559	0,07247	0,07968	0,08719	0,09498	0,10302

Exemplo:
Qual é o valor da prestação mensal de um empréstimo de R$ 2.000,00 para ser liquidado em 24 meses à taxa de 2% ao mês **(2.000,00 X 0,05287 = 105,74)**
HP12C = 2.000,00 **CHS PV** 2 **i** 24 **n PMT**